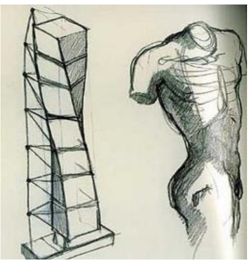


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO | | | | |
| **DNC** GE | Cátedra: **ESTRUCTURAS - NIVEL 3 - PLAN VI** | | | |
| | Taller: VERTICAL III - DELALOYE - NICO - CLIVIO | | | |
| | **Guía de Estudio: Láminas Anticlásticas** | | | |
| Curso 2014 | Elaboró: JTP Ing. Angel Maydana | Revisión: Ing. Delaloye | Fecha: oct 2014 | |

## PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

*Félix Candela, restaurante Los manantiales, Xochimilco, México, 1958*

Para tener una idea concreta de la forma de esta superficie, consideremos dos planos paralelos: Plano A A' B paralelo al plano C C' D (Fig Nº1)

Las rectas AB y CD no paralelas entre sí, pero contenidas en aquellos dos planos paralelos, las llamaremos directrices. La recta BC (generatriz), que corta a las dos directrices y que es paralela al plano A A' D (plano director), al desplazarse paralelamente al plano director y apoyándose sobre las directrices, genera la superficie.
El paraboloide hiperbólico contiene dos familias de rectas. Cada familia es paralela a un plano director y ambos planos forman un ángulo entre sí, arbitrario ξ. Cuando ξ = 90° el paraboloide es equilátero.

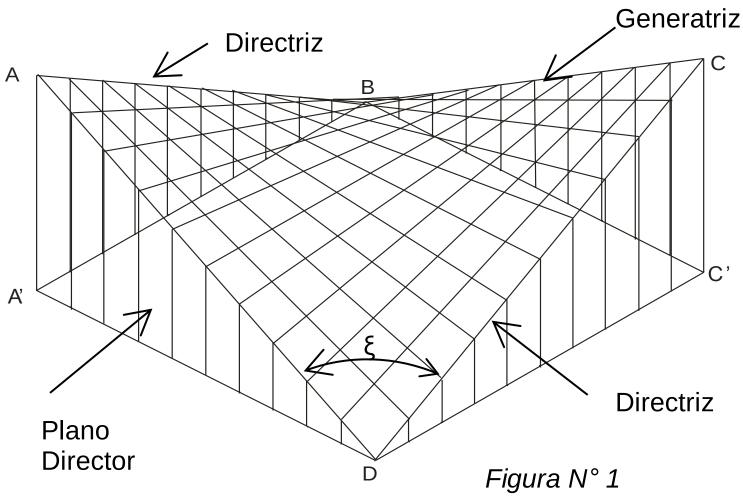



*Figura N° 1*

La intersecciónde la superficie con cualquier plano vertical paralelo a las diagonales produce curvas parabólicas. En especial, los planos verticales que pasan por las diagonales principales dan como intersección parábolas principales, una con concavidad hacia abajo y otra con con concavidad hacia arriba. Figuras N° 2 y 3.

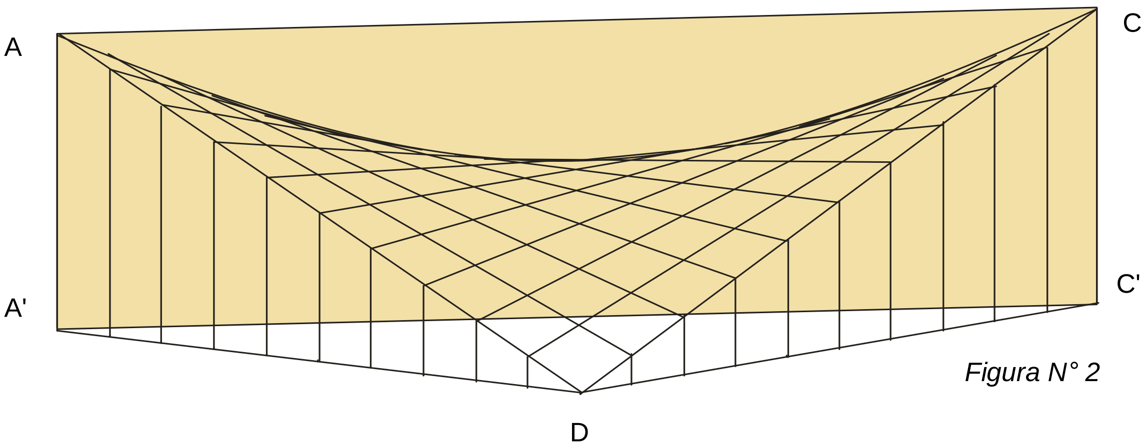



*Figura N° 2*

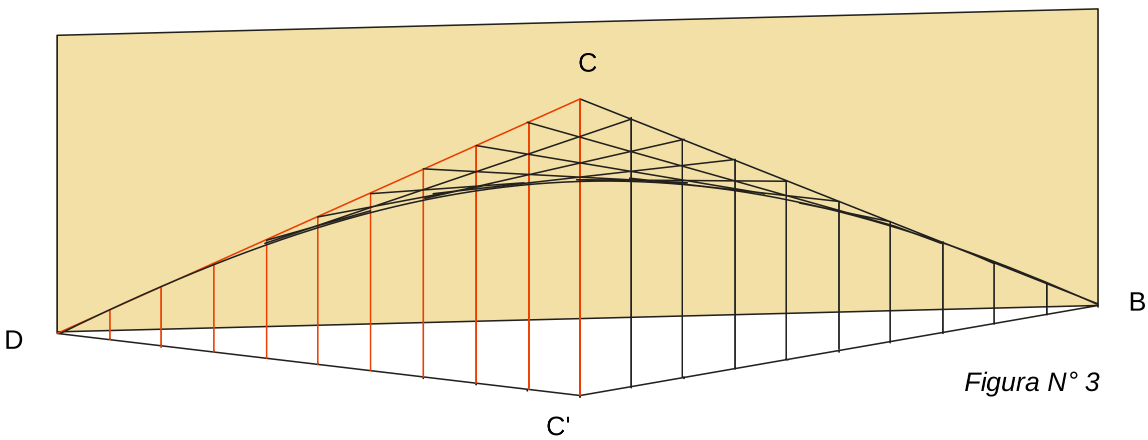



*Figura N° 3*

Por esta razón se denominan a estas superficies con el nombre de anticlásticas, es decir con curvaturas opuestas en un mismo punto (curvatura de gauss negativa), según la sección de planos normales entre sí. Pero a pesar de ser una superficie de doble curvatura, sus intersecciones con planos verticales paralelos a los planos directores producen líneas rectas, (ver Figura N° 4). De éstas sólo las centrales son horizontales.

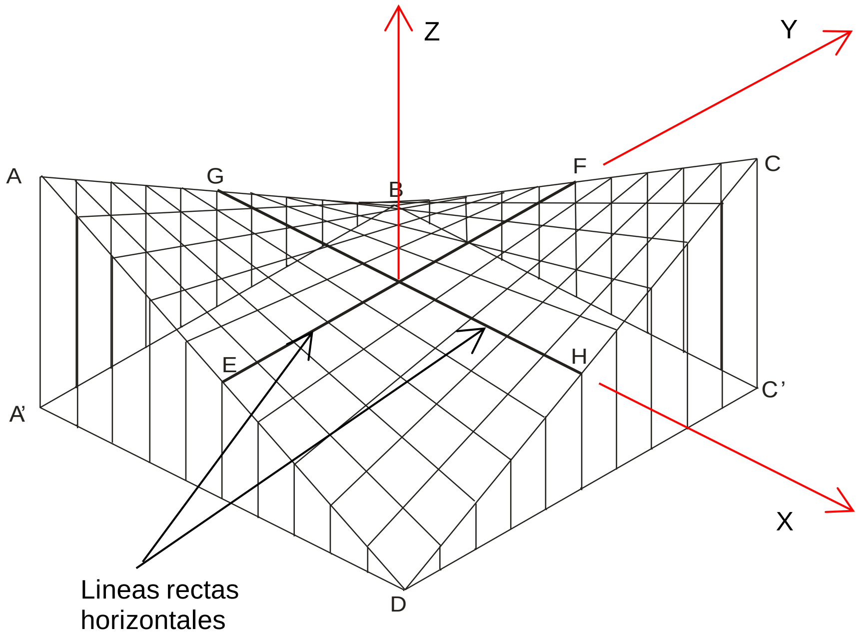



*Figura N° 4*

La intersección de la superficie con un plano horizontal producen curvas hiperbólicas, por ello se le da el nombre de paraboloide (todos los planos verticales forman parábolas) hiperbólico (todos los planos horizontales forman hipérbolas). Figuras N° 5.

Cuando el plano horizontal está cerca de los vértices superiores (Fig. Nª 5), las hipérbolas tienen por eje la diagonal que une esos vértices.

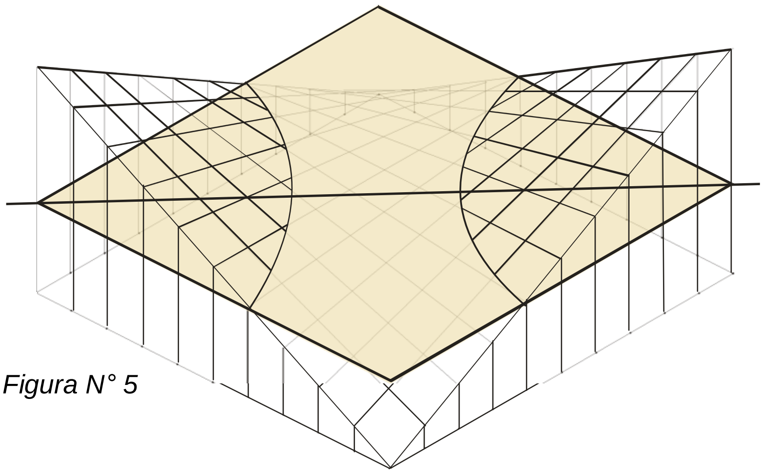


*Figura N° 5*

Al descender el plano, esas hipérbolas tienden a las asíntotas. Fig. N° 6

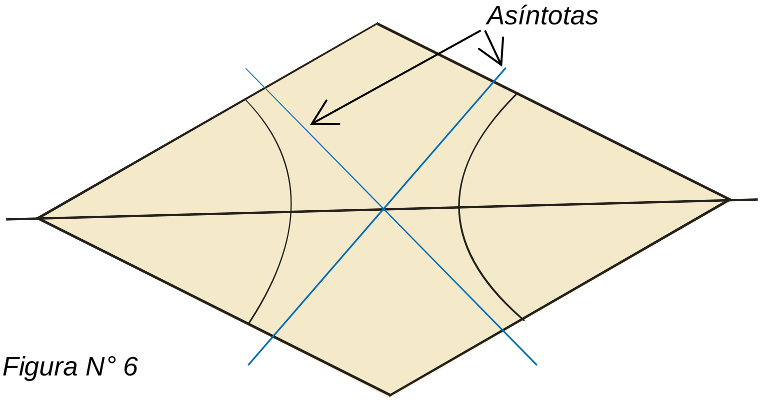



*Figura N° 6*

Debajo de la posición anterior, el plano intercepta según hipérbolas cuyo eje es el de la diagonal que une los vértices inferiores. Fig. N° 7 y 8

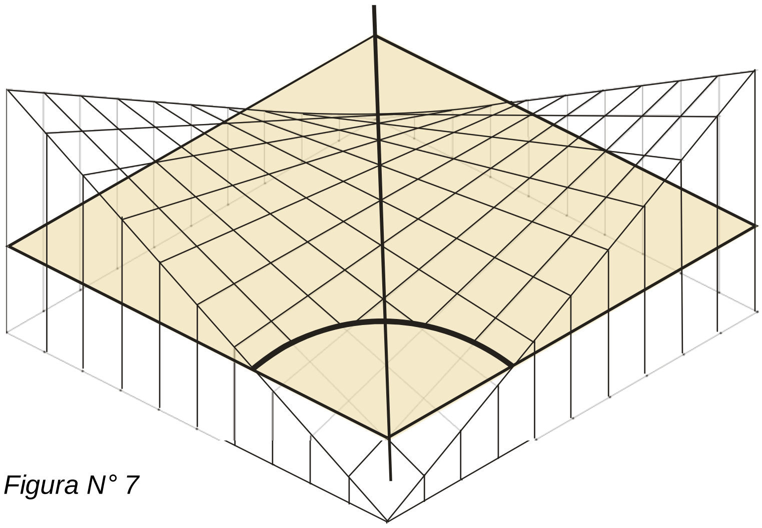


*Figura N° 7*

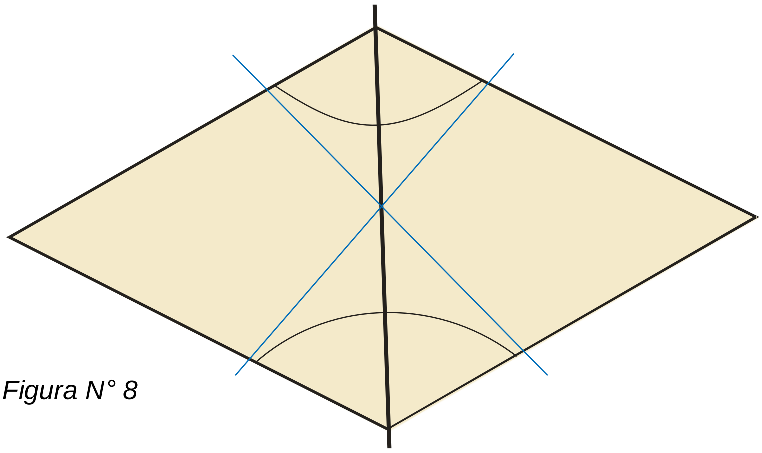
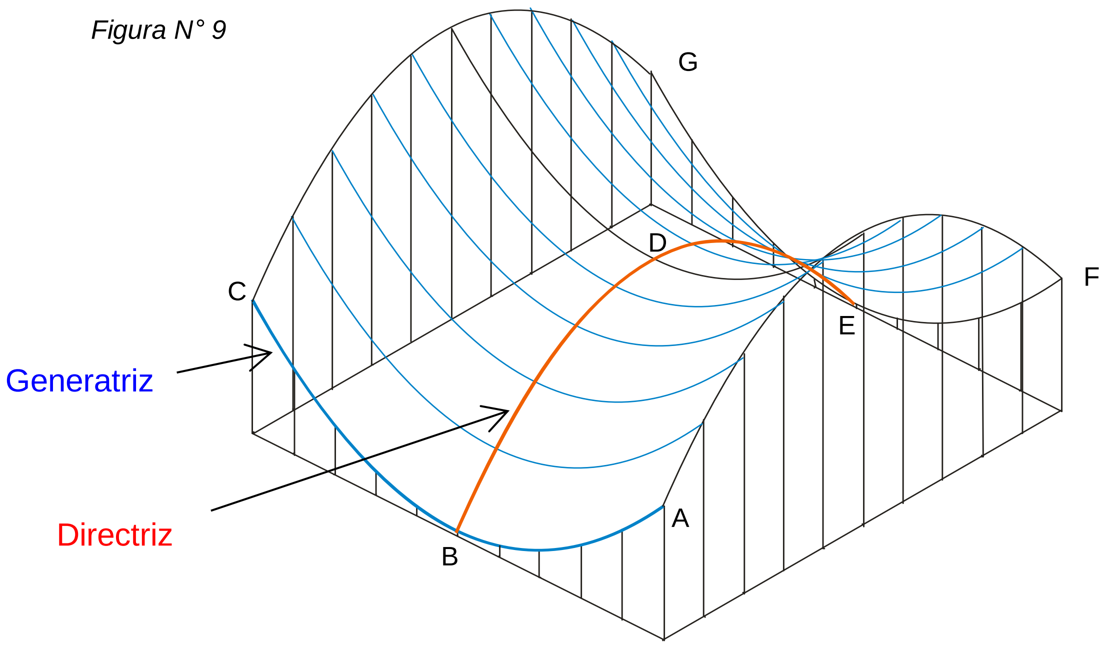


*Figura N° 8*

Todavía cabe otra interpretación de esta superficie y es como superficie de traslación. Así en la Figura N° 9, la parábola principal ABC (generatriz) al moverse paralelamente a sí misma, apoyándose sobre otra parábola principal BDE (directriz) con concavidad opuesta a la anterior, genera un paraboloide hiperbólico.

*Figura N° 9*




Otra forma estructural de lámina paraboloide, limitada con arcos parabólicos, se obtiene uniendo sucesivos puntos de dos arcos mediante rectas pertenecientes a planos paralelos no perpendiculares a los planos de los arcos (tímpanos). Figura N° 10. De esta forma se genera un paraboloide hiperbólico.
Si materializamos estas rectas con tablas de madera, una al lado de la otra, tendríamos formado el encofrado de esta superficie de doble curvatura.

Constructivamente es muy importante poder materializar estas superficies con encofrados de tablas rectas.
En general se dispone en una dirección vigas de madera (a) convenientemente separadas y en la otra dirección se apoyan las tablas unidas (b).
Con esta forma estructural se logran grandes luces dado que el arco decide.

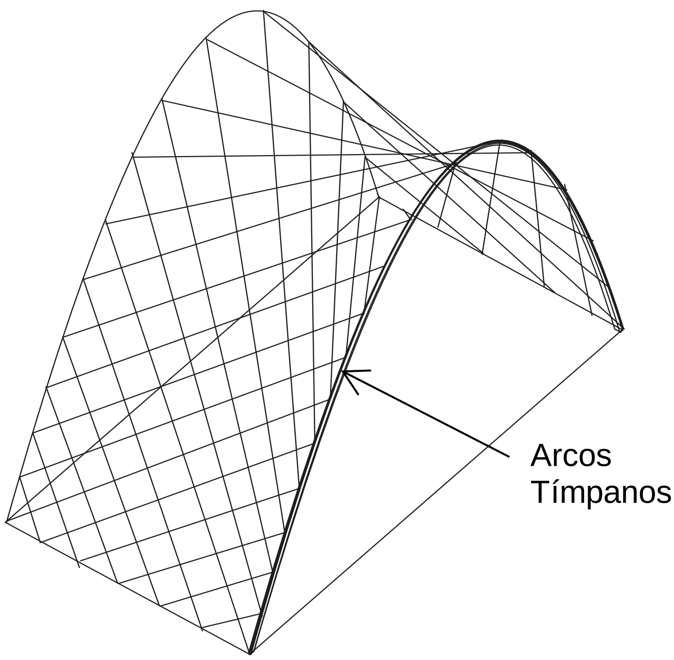
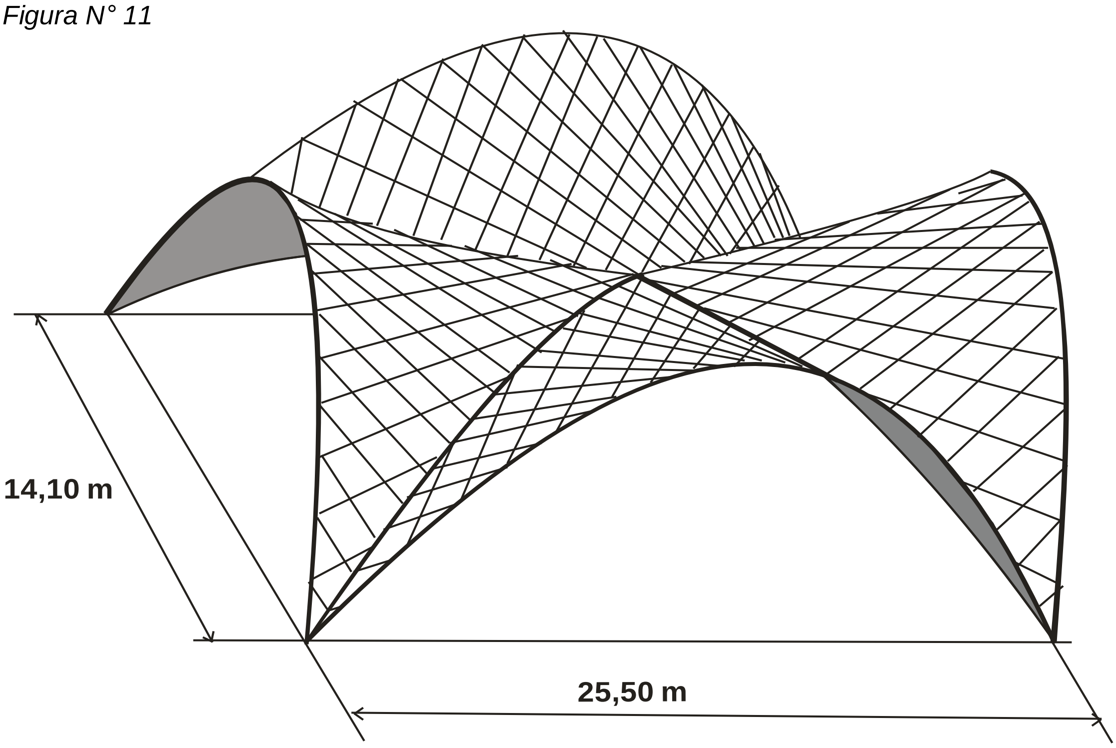



*Figura N° 10*

*Figura N° 11*




Seccionando la superficie de la Figura Nº 9 mediante planos verticales que pasan por ADG y CDF respectivamente, se obtienen cuatro secciones de las cuales tomando la ADF y acoplándola con otras similares, se construye una bóveda de aristas como se indica en la Figura Nº 11

Las intersecciones de las cuatro partes forman miembros angulares de sección V, que funcionan como arcos de tres articulaciones soportando las láminas. Los bordes perimetrales exigen un nervio de rigidez, especialmente cuando la planta no es cuadrada.

*Ubicado en el centro del Parque, es el edificio más emblemático de L'Oceanogràfic de la ciudad de Las Artes y de las Ciencias, en Valencia. Su cubierta, diseñada por Félix Candela representa una figura de paraboloide similar a un nenúfar, y la disposición en la planta inferior de un gran acuario perfectamente integrado en todo su perímetro. Figura Nº 12*

*Figura N° 12*

Si tuviéramos que acotar un plano de replanteo, éste resultaría fácil de realizar por simple interpolación lineal. Estableceremos primero las medidas del contorno (en este caso de 20 x 20) y luego los puntos exteriores. Dibujamos la Figura Nº 1 en planta y resulta así la Figura Nº 13, con cota en los puntos A y C de: +10,0 y cotas en los puntos B y D de: -10,0. Los ejes X e Y son de cota 0,00

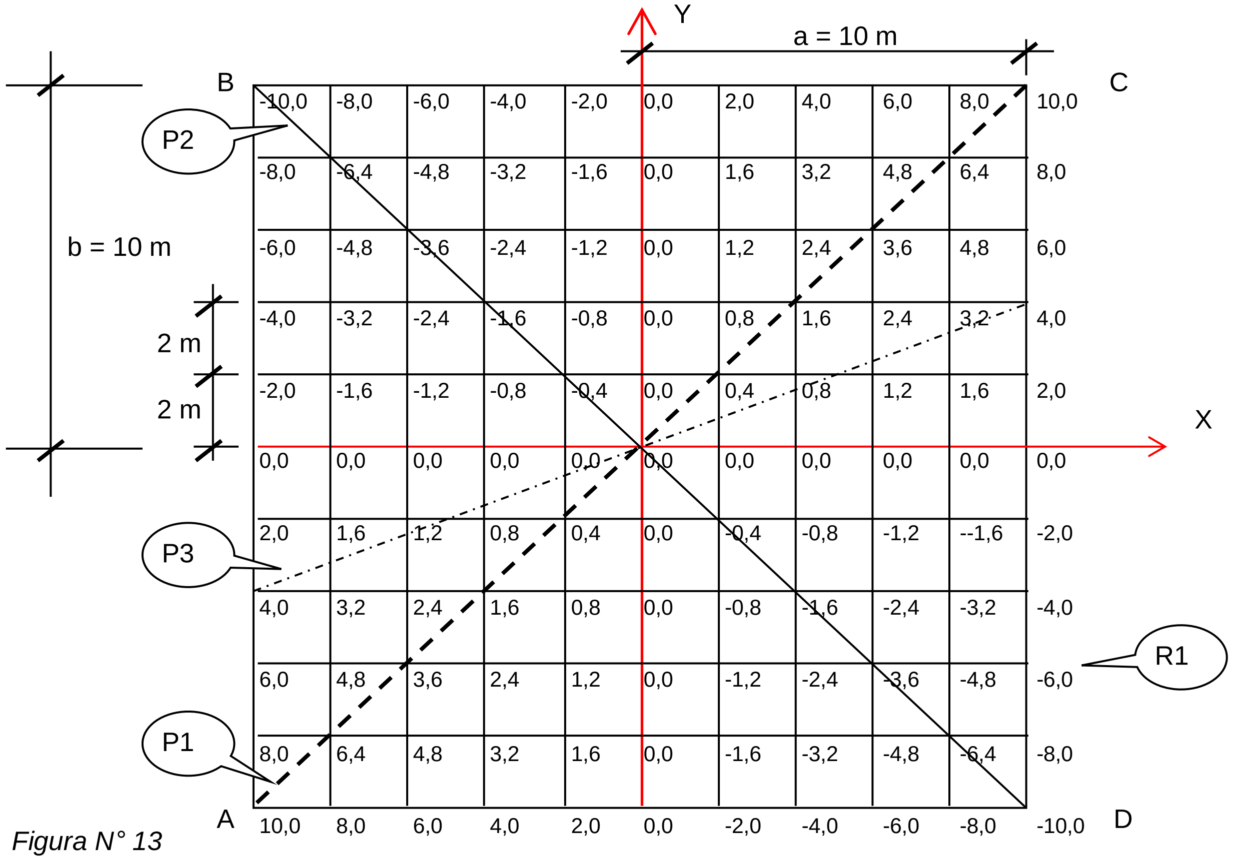



*Figura N° 13*

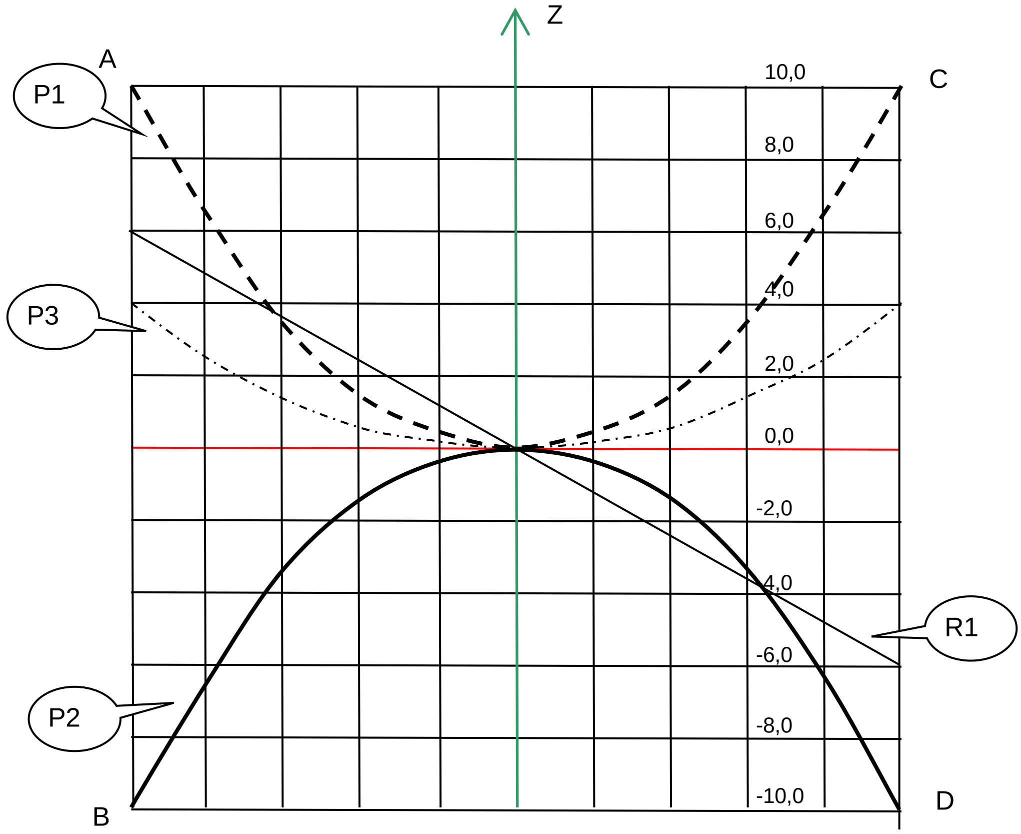



*Figura N° 14*

Las parábolas P1, P2 y P3 indicadas en la Figura Nº 14, resultan de la intersección de planos verticales con las diagonales principales (las dos primeras) y de una diagonal cualquiera la tercera.
Puede observarse la correspondencia entre las cotas de la cuadrícula en la Figura Nº 13 y las intersecciones de cada parábola con las líneas de nivel indicadas en la Figura Nº 14
Finalmente, la intersección de planos verticales en la dirección paralela a los planos directores (R1) con la superficie, dan rectas.

Podemos establecer lo siguiente:
1) Cortes por planos verticales que coincidan con las diagonales principales, dan como intersección parábolas de máxima curvatura (P1 y P2).
2) Cortes por planos verticales que no sean paralelos a los anteriores, ni lo sean tampoco a las rectas generadoras, dan como intersecciones parábolas de menor curvatura que las principales (P3).
3) Cortes por planos verticales paralelos a la dirección de las rectas generadoras dan rectas como intersecciones (R1)

INTERSECCIÓN CON PLANOS HORIZONTALES
Para evidenciar que tipo de intersección se dibuja cuando cortamos con planos horizontales la superficie generada, vemos la Figura Nº 15.

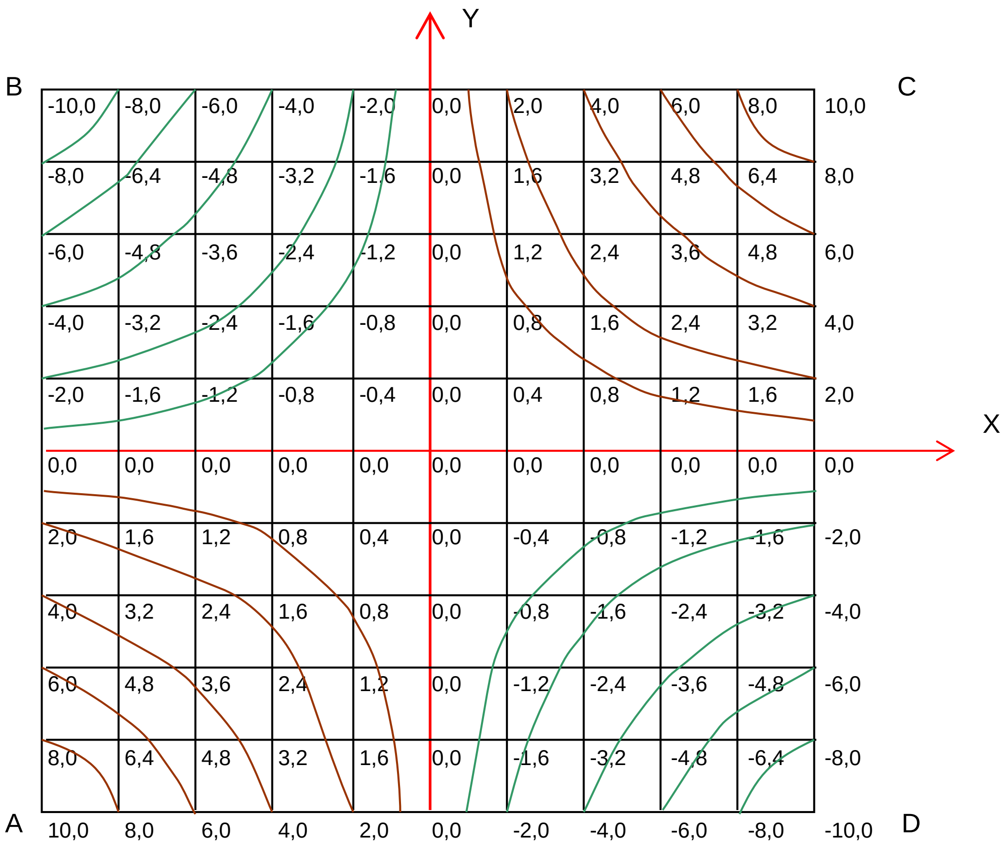


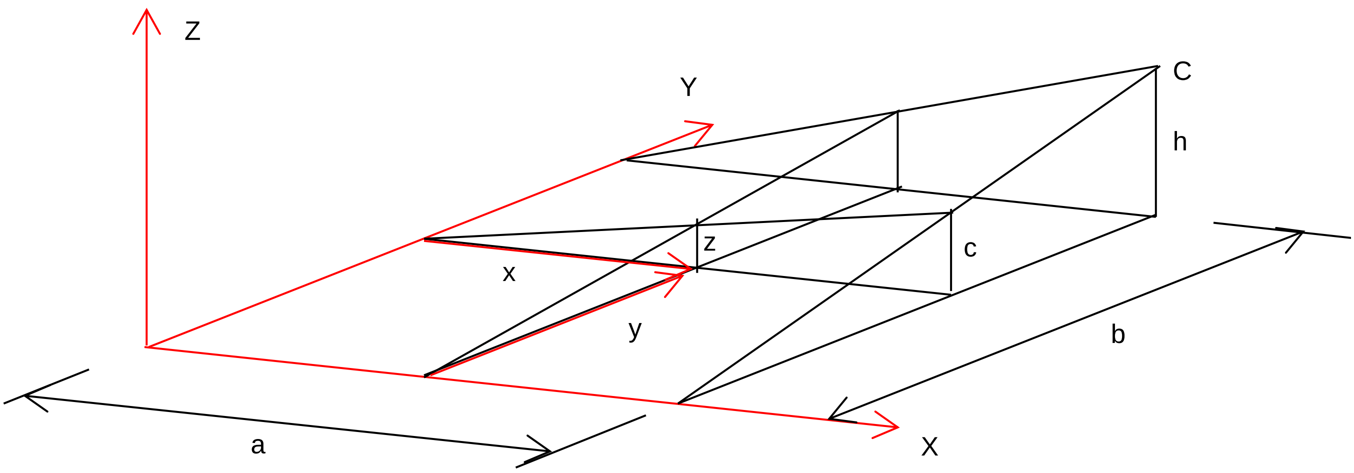

*Figura N° 15*

Se indican en la Figura Nº 15 los dos juegos de curvas (hipérbolas) según se corte con planos horizontales en cotas negativas o positivas..

## ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE

Para evidenciar que tipo de intersección se dibuja cuando cortamos con planos horizontales la superficie generada, vemos la Figura Nº 16.

*Figura N° 16*




Por simple relación geométrica se tiene:

$$\frac{c}{h} = \frac{y}{b} \qquad \text{y además} \qquad \frac{z}{x} = \frac{c}{a}$$

$$c = \frac{h}{b}\, y \quad \Rightarrow \quad z = \frac{h}{a\ b}\, x\ y$$

llamando: $k = \dfrac{h}{a\ b}$ alabeo de la superficie

$\boxed{z = k\ x\ y}$ ecuación de la superficie referida a los ejes XYZ

Tomando la Figura Nº 13, para:

a = 10 m b = 10 m h = 10 m ⇒ k = 0,1/ m

x = 8 m y = 6 m ⇒ z = 0,1 x 8 x 6 = 4,8 m

x = 6 m y = 2 m ⇒ z = 0,1 x 6 x 2 = 1,2 m

x = -4 m y = 4 m ⇒ z = 0,1 x (-4) x 4 = -1,6 m

x = -4 m y = -8 m ⇒ z = 0,1 x (-4) x (-8) = 3,2 m

De esta forma podemos determinar la posición de cualquier punto de la superficie.

ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS

Consideramos la superficie dividida en dos series de arcos parabólicos que sigan las direcciones de las parábolas principales, veamos las Figura Nº 17 y 18.

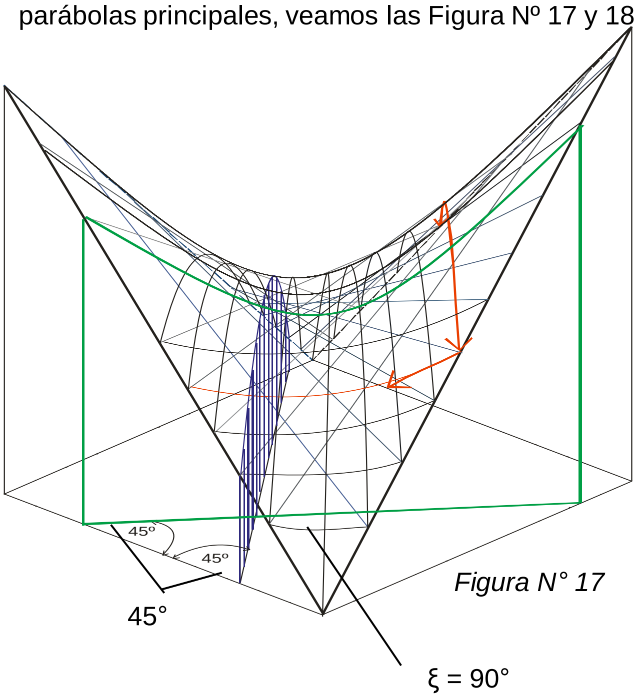



Figura N° 17

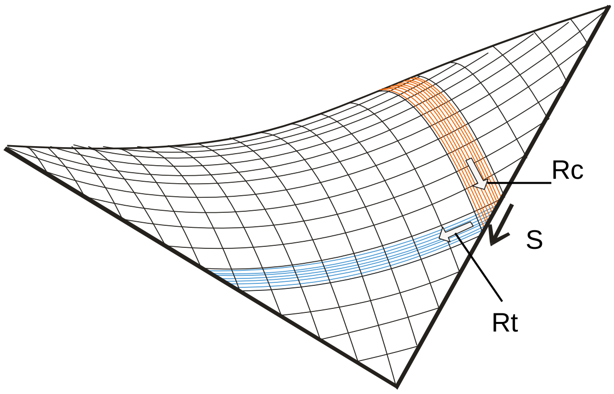



Figura N° 18

En caso de paraboloides equiláteros ( ξ = 90° ) estos arcos forman un ángulo de 45º con las generatrices rectas, tal como lo vemos en la Figura Nº 17

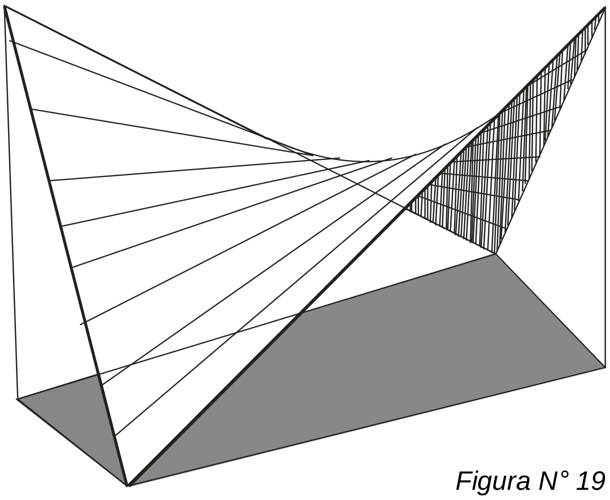
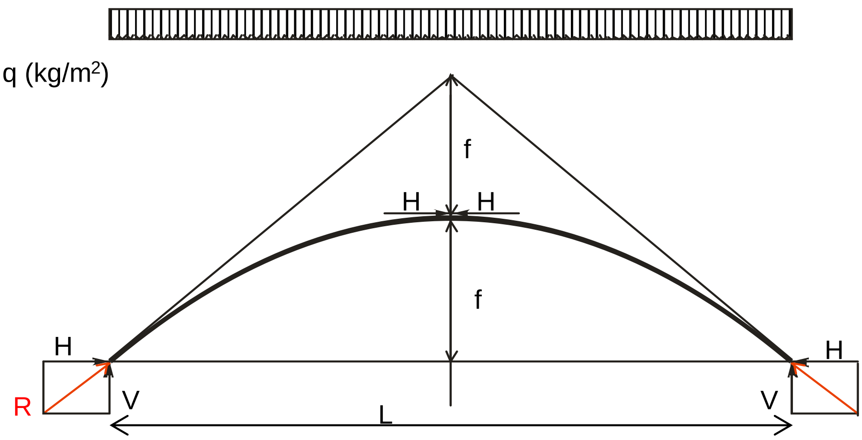


Figura N° 19

A las reacciones de las fajas parabólicas contra los bordes las llamaremos Rt (tracción) y Rc (compresión), tal como lo vemos en la Figura Nº 18. Las fuerzas de borde se combinan de manera tal que dan lugar a una resultante S que "camina" por el elemento de borde. Esta es una de las características principales de los paraboloides de bordes rectos; los bordes resultan sometidos sólo a esfuerzos directos de tracción o compresión

La carga q (kg/m2) se distribuye por mitades entre parábolas traccionadas y parábolas comprimidas, ya que ambas familias de curvas tienen la misma forma, igual curvatura y por consiguiente, igual rigidez.

Si el alabeo de la superficie es pequeño (relación entre flecha y luz de la parábola principal ≤ 0,15), la carga del peso propio de la cáscara cuyo espesor suponemos constante, se puede suponer uniformemente repartida en su proyección horizontal.




$$\frac{f}{L} \leq 0{,}15$$

Figura N° 20

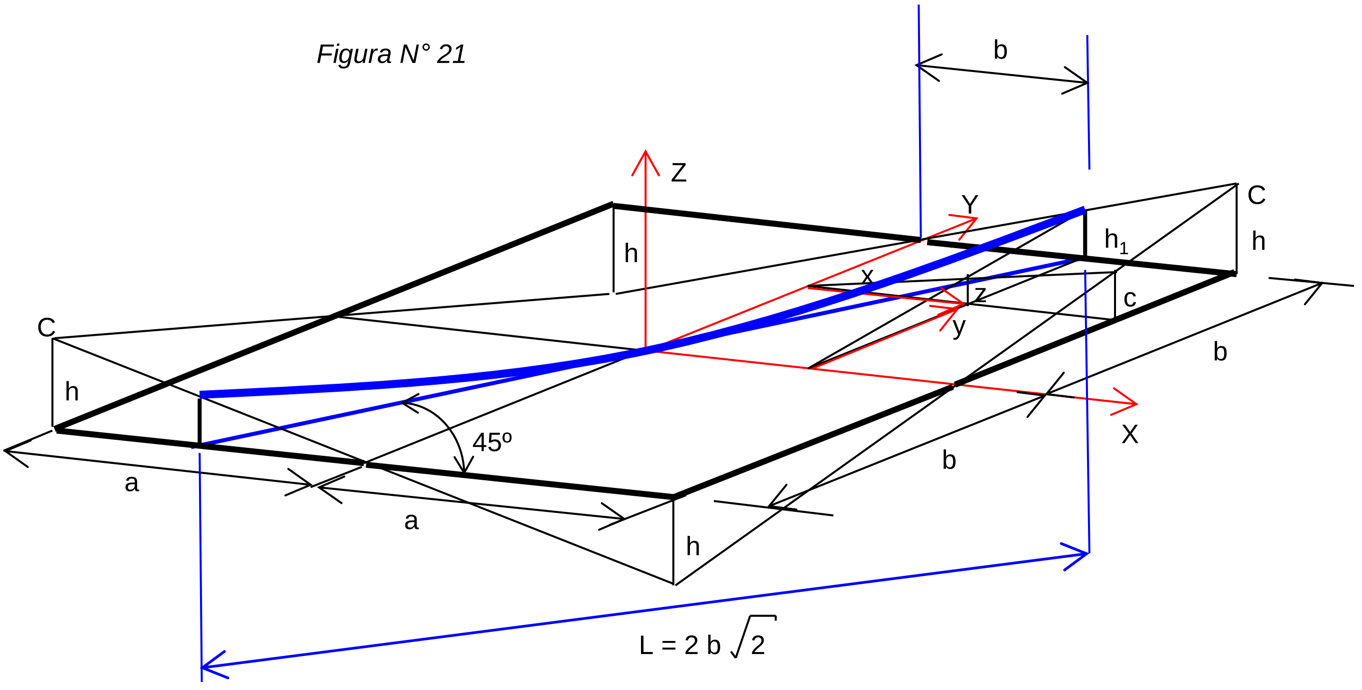
Por otra parte, si la relación entre la flecha y la luz es pequeña (menor a 0,15) hay poca diferencia entre el esfuerzo interno "máximo" R que se produce en el arranque de los arcos, y el "mínimo" H que actúa en la clave. Esto nos permite decir que el esfuerzo en "casi" constante en cualquiera de los puntos de la faja parabólica, y de valor H. No importa que las fajas paralelas tengan distintas longitudes, lo que importan es que tienen la misma forma, igual curvatura y por ello H es constante para todas las fajas.

## ESFUERZOS NORMALES EN LA CÁSCARA

Recordamos el valor del empuje en un arco parabólico sometido a carga uniformemente distribuida, según la proyección horizontal:

$$H = \frac{\text{carga por metro} \times \text{luz}^2}{8 \times \text{flecha}}$$

*Figura N° 21*




$$H = Hc = Ht = \frac{q/2 \times (2\,b\sqrt{2})^2}{8 \times h1}$$

q / 2 = mitad de la carga por metro para cada parábola

$L = 2\,b\sqrt{2}$ = luz de las parábolas centrales

h1 = flecha de las parábolas centrales

$$H = \frac{q/2 \times (4\;b^2\;2)}{8 \times h1}$$

$$H = \frac{q \times (b^2)}{2 \times h1} \Rightarrow$$

y siedo nuestro caso: $\frac{h1}{b} = \frac{h}{a}$

genéricamente:

$$H = \frac{q \times (b^2) \times a}{2 \times h \times b} \Rightarrow \boxed{H = \frac{q\,.\,a\,.\,b}{2\,.\,h}} \Rightarrow \boxed{H = Hc = Ht = \frac{q\,.\,x\,.\,y}{2\,.\,z}}$$

Una vez calculado el esfuerzos Hc, debemos verificar que σ'b, no sobrepase las tensiones admisibles del material.

$$\sigma'b_1 = \frac{Hc}{t\ (cm) \times 100\ cm} < \sigma'b_{adm}$$

En la dirección de las parábolas de tracción, los esfuerzos deberán se absorbidos mediante armaduras cuya sección se calcula de la siguiente manera:

$$Fe\ (cm^2) = \frac{Ht\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ (kg/cm^2)}$$

En general, la cáscara del paraboloide no constituye problema dado que con pequeños espesores cumple con las condiciones de equilibrio, no obstante conviene constructivamente darle espesores superiores a los 6 cm. El problema principal de los paraboloides hiperbólicos está en los bordes.

ESFUERZOS INTERNOS DE CORTE

Acabamos de ver que las parábolas interiores que siguen la dirección de las diagonales del cuadrado, están sometidas únicamente a esfuerzos de compresión y de tracción. Son las direcciones principales de la superficie.

Si nos referimos en particular a un cuadrado de un metro de lado ubicado en un lugar cualquiera de la superficie, pero con sus lados orientados en la dirección de las parábolas principales, su estado de solicitación sería el que se indica en la Figura N° 22

Esta forma de solicitación se define en resistencia de materiales como "corte puro", porque todas las secciones paralelas a los bordes del paraboloide hiperbólico, diagonales de los cuadrados unitarios, están solicitadas únicamente al corte, es decir que las fuerzas normales son nulas.

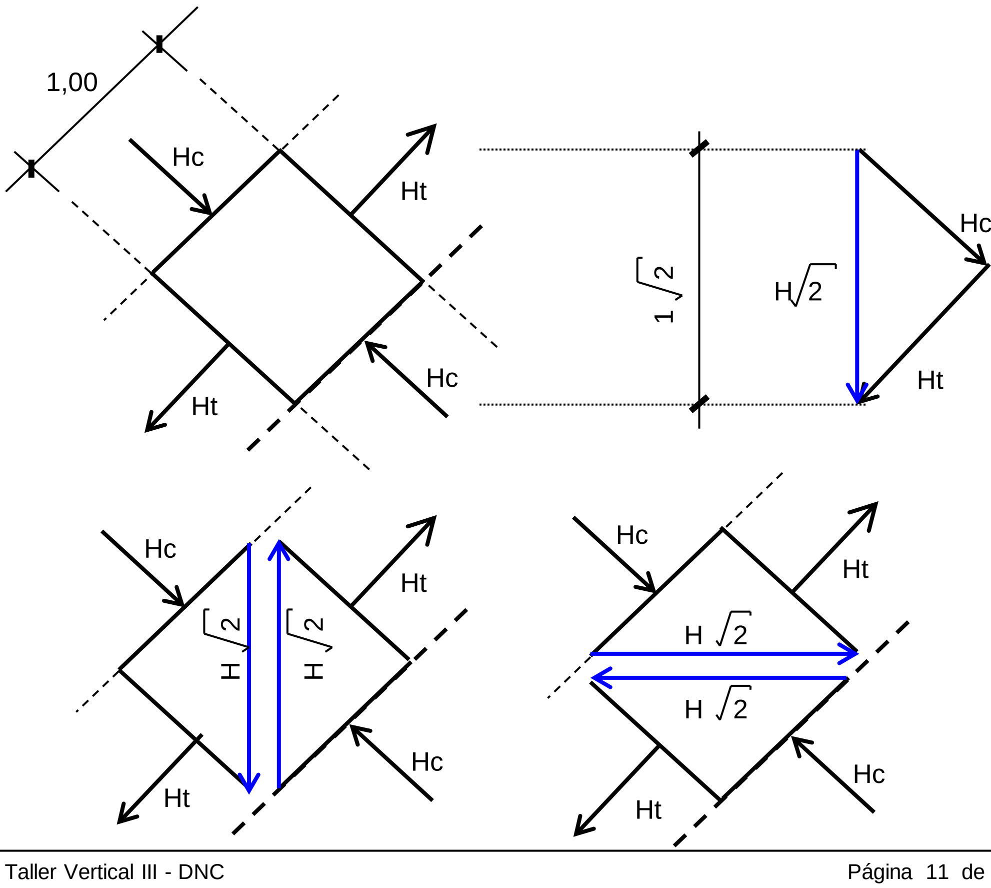



*Figura N° 22*

Se ve en la Figura Nº 22 que el valor del esfuerzo de corte para la diagonal del cuadrado unitario es:

$$H\sqrt{2}$$

Pero como se aplica en una longitud

$$1\sqrt{2}$$

Resulta que su valor unitario es:

$$\frac{H\sqrt{2}}{1\sqrt{2}} = H$$

o sea, idéntico valor del esfuerzo de corte al valor de tracción o compresión correspondiente a las parábolas principales. La misma situación se produce en las zonas marginales donde las fajas acometen contra el borde, Figura N° 23. Esto demuestra que la cáscara trasmite sus esfuerzos al borde mediante esfuerzos de corte, de valor H por unidad de longitud. Pero hay que tener en cuenta que el esfuerzo H que trasmite al borde una determinada pareja de fajas parabólicas (una de tracción y una de compresión), se suma al que ya le trasmitieron al borde las parejas anteriores, y estos esfuerzos se van acumulando en el elemento de borde en forma de un esfuerzo axial, de compresión o de tracción según los casos, gradualmente creciente.
Entre cáscara y viga de borde existe un esfuerzo tangencial cuyo valor es H por metro de longitud y que no debe crear tensiones superiores a las admisibles por el material. Debe cumplir la condición:

$$\tau'b_1 = \frac{H}{t\ (cm) \times 100\ cm} < \tau'b_{adm}$$

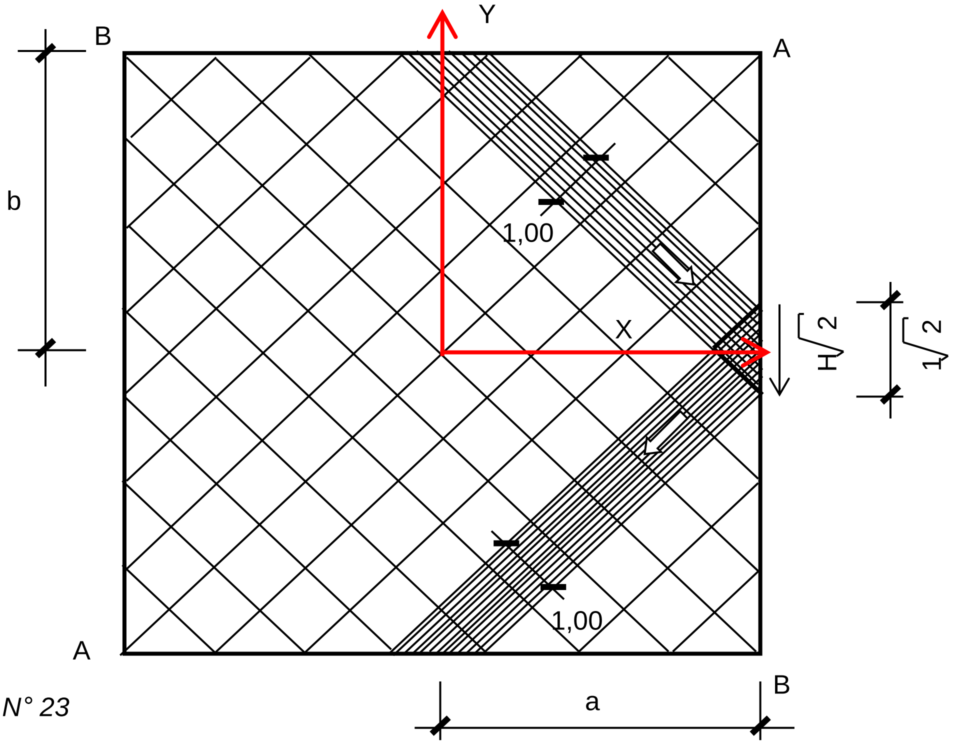



*Figura N° 23*

El máximo valor de ΣH producirá una compresión en la viga de borde cuyas tensiones no deberá sobrepasar el máximo admitido por el material. Debe tenerse entonces una sección capaz de resistir la fuerza que le trasmite la cáscara y por diferenciarse netamente de ella se denomina **viga de borde**.
Las viga de borde no soportan, al menos teóricamente, más flexiones que las que provienen del peso propio, y actúan como una columna con compresión variable, creciente desde cero en el extremo A para llegar a un máximo en B.
En los casos de luces corrientes y para predimensionar, se suele prescindir de la consideración de estos momentos adicionales y se calcula el elemento de borde trabajando sólo a compresión. Esto equivale a suponer que las vigas de borde están "colgadas" de la cáscara.
Los bordes entonces, constituyen un marco rígido en el cual se apoyan las cáscaras, trasmitiendo compresiones o tracciones. Esto puede aceptarse para luces reducidas, que no superen los 20,00 metros. Asimismo y para contrarrestar esas perturbaciones por flexión, conviene tomar una tensión baja para el hormigón.
Si la superficie de la Figura Nº 23 estuviera colgada de los puntos alto A-A, en lugar de apoyada en los puntos B-B, entonces los elementos de borde estarían traccionados, con un esfuerzo creciente desde cero en B hasta un máximo en ΣH en A. En tal caso la viga de borde debería dimensionarse teniendo en cuenta las tensiones admisibles del material solicitado a tracción; en caso de ser hormigón armado las tracciones son absorbidas por la armadura..

ESFUERZOS EN LOS BORDES Y REACCIONES DE APOYO
Consideremos el caso simple de un paraboloide hiperbólico de planta cuadrada, con lado de magnitud:
2 a = 2 b como se indica en la Figura Nº 23
Tiene dos puntos altos A-A y dos puntos bajos B-B en los que apoya.
Ya hemos visto que la superficie está formulada por dos familias de fajas parabólicas, cuyas parábolas principales están sometidas a esfuerzos internos de valor:

$$H = Hc = Ht = \frac{q \,.\, a \,.\, b}{2 \,.\, h} = \frac{q \,.\, a^2}{2 \,.\, h}$$

donde a y h son las coordenadas de uno de los vértices referidas al sistema XYZ

En el borde el esfuerzo vale H por unidad de longitud. Estos esfuerzos de borde se van acumulando desde A hasta B, donde alcanzan el máximo valor, al que llamamos ΣH :

$$\Sigma H = H \frac{2 \,.\, a}{\cos \varphi}$$

Ya que

$$\left( \frac{2 \,.\, a}{\cos \varphi} \right)$$

es la longitud del elemento de borde. Ver Figura Nº 24

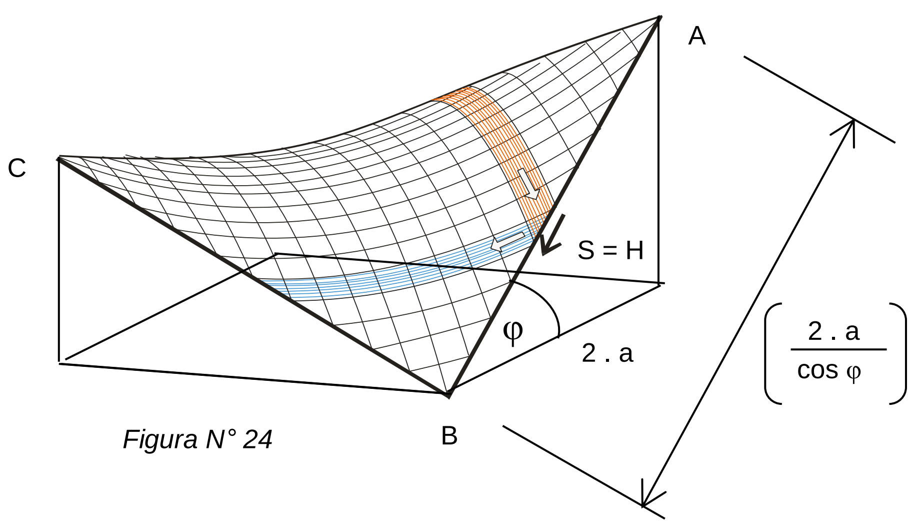
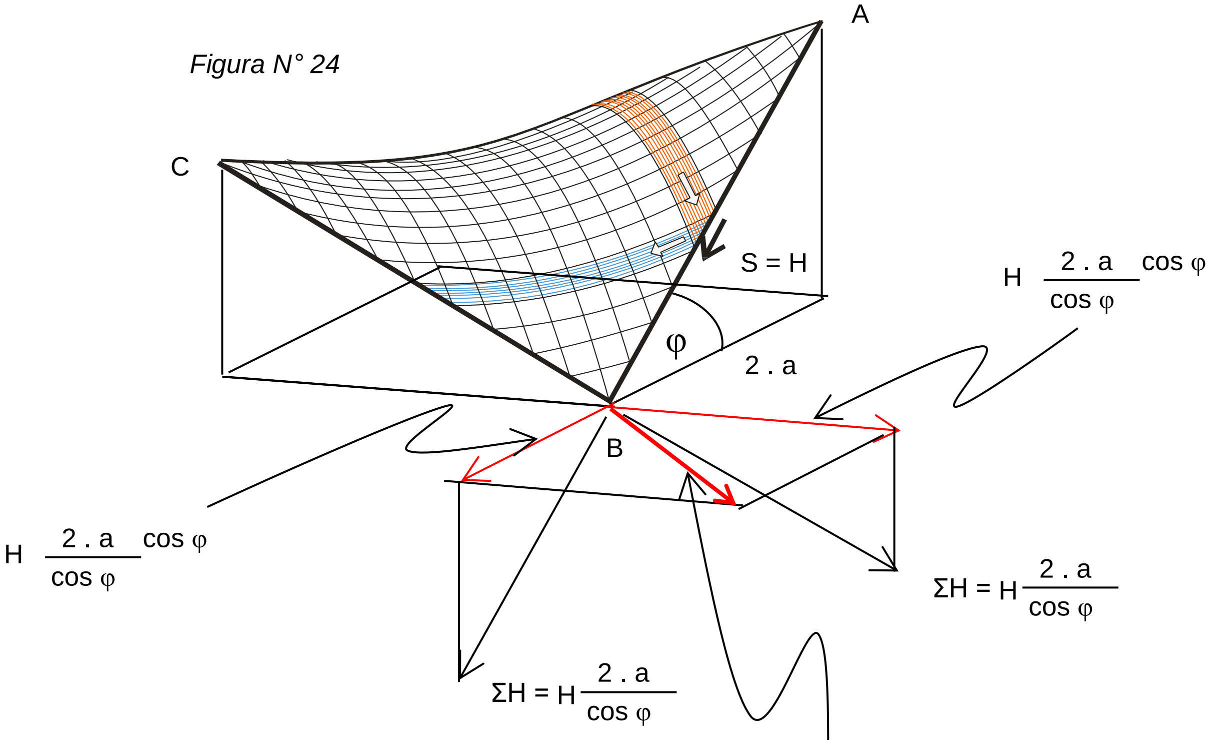



*Figura N° 24*

*Figura N° 24*

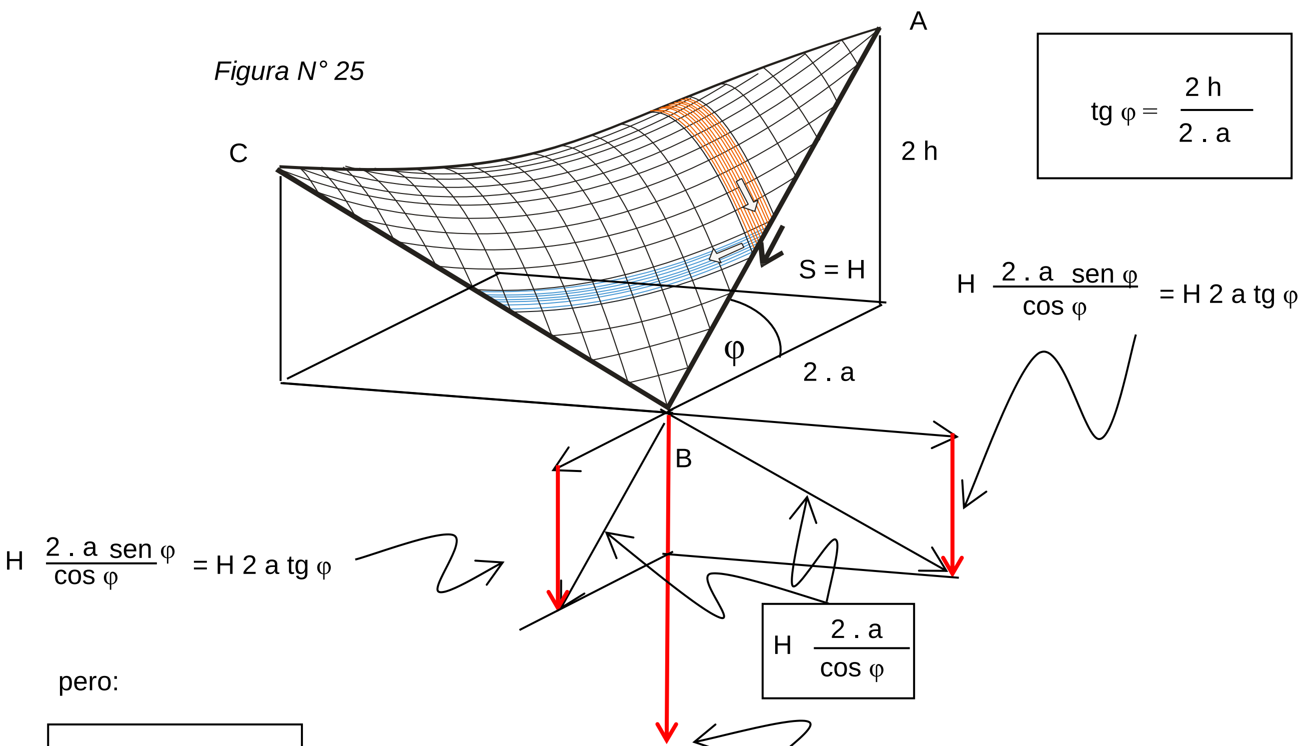



Fuerza resultante horizontal en la dirección de la diagonal B-B

$R_H = H \cdot 2 \cdot a \sqrt{2}$

La carga vertical total que trasmiten los dos bordes que acometen a un apoyo común será:

*Figura N° 25*




pero:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2\,h}{2 \cdot a}}$$

Fuerza resultante vertical correspondiente a la mitad de la superficie total

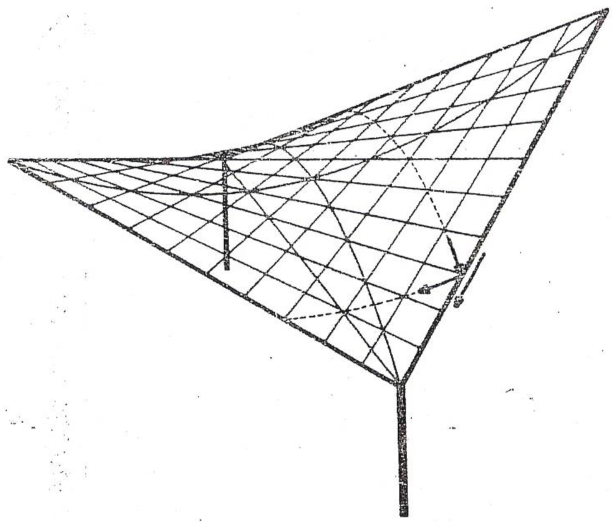
$R_V = H \cdot 4 \cdot h$

FORMAS ESTRUCTURALES

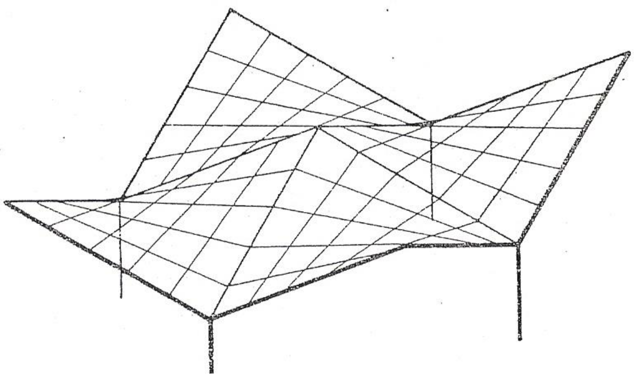
Se pueden obtener varias formas estructurales mediante el uso de un solo sector de la superficie alabeada total, o bien por combinaciones de distintos sectores.

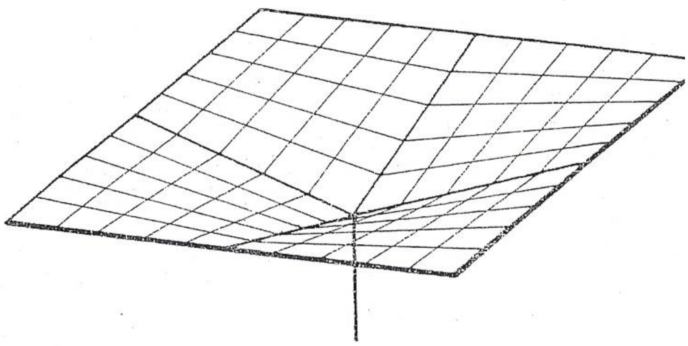
La forma más simple de cubierta está limitada por un cuadrilátero alabeado sobre planta cuadrada. Apoya en los vértices inferiores y requiere un tirante para absorber los empujes. Los bordes trabajando en compresión trasmiten los esfuerzos a los apoyos.

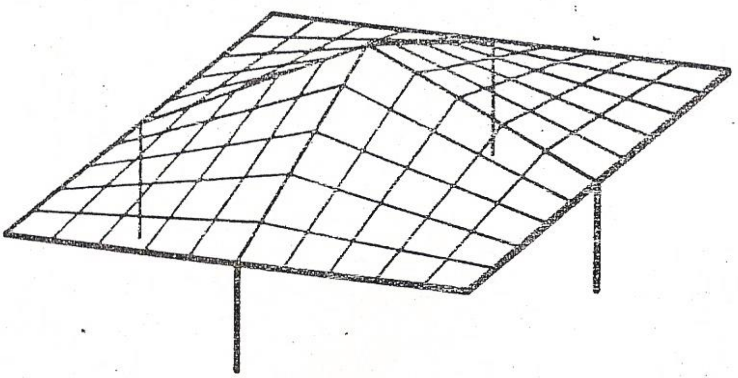
*Figura N° 26*

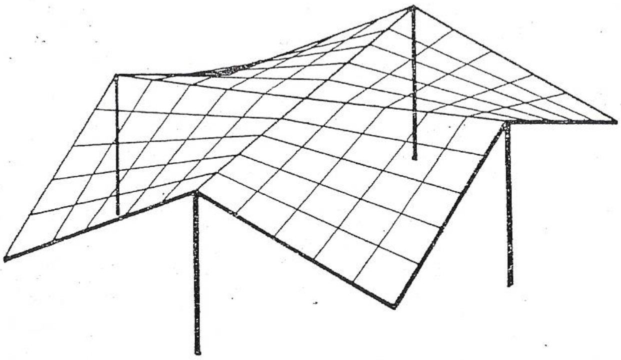


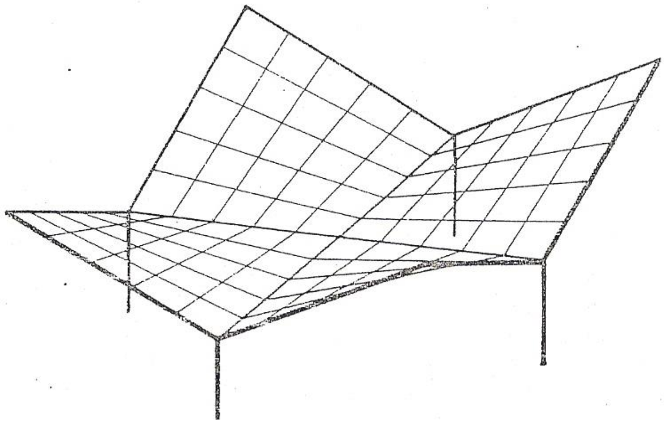
Otras formas:

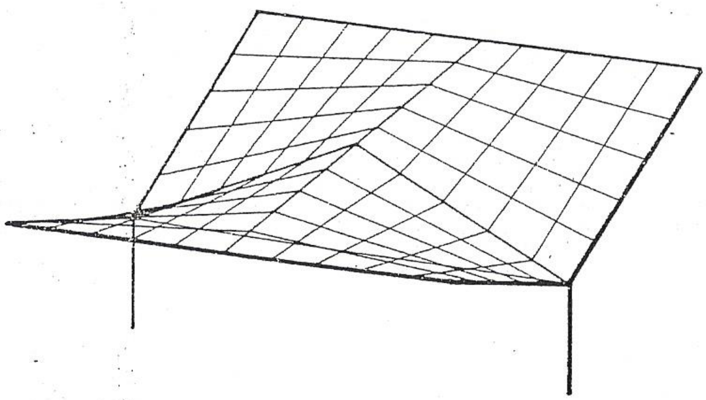


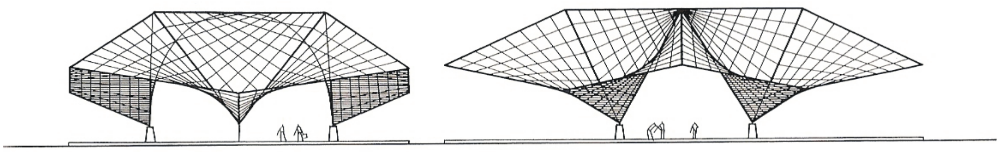


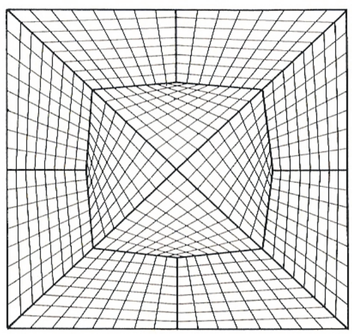












12 paraboloides hiperbólicos
12 superficies "hp"