

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO			
<b>DNC GE</b>	Cátedra: <b>ESTRUCTURAS - NIVEL 3 - PLAN VI</b>		
	Taller: VERTICAL III - DELALOYE - NICO - CLIVIO		
	<b>Guía de Estudio: Láminas Sinclásticas- Cúpulas</b>		
Curso 2014	Elaboró: JTP Ing. Angel Maydana	Revisión: Ing. Delaloye	Fecha: sept 2014

## CÚPULA DE ROTACIÓN



*Cúpula de la Basílica de San Pedro  
Fig. 1*

*La cúpula central (1588-1590) de la Basílica de San Pedro, en el Vaticano, diseñada por Miguel Ángel y terminada 24 años después de su muerte por los arq. Domenico Fontana y Giacomo della Porta, tiene 42,5 m de diámetro y 132 m de altura. Desde el comienzo presentó importantes fisuras según los meridianos, que no eran otra cosa que la manifestación de incapacidad de la cubierta para tomar tracciones según los paralelos. En el encuentro de la cúpula con el cilindro de apoyo se dispusieron cadenas para tomar los efectos de tracción. Esta solución, característica del Renacimiento, fue un paso importante hacia el esquema estructural de las cáscaras actuales de hormigón armado, que presentan armaduras en las zonas traccionadas.*

**CÚPULAS DE ROTACIÓN:** Se obtienen haciendo girar una curva plana cualquiera llamada GENERATRIZ, alrededor de un eje contenido en su plano.

Estas estructuras son eficientes y por lo tanto económicas, si se cumplen condiciones que garantizan el funcionamiento membranal.

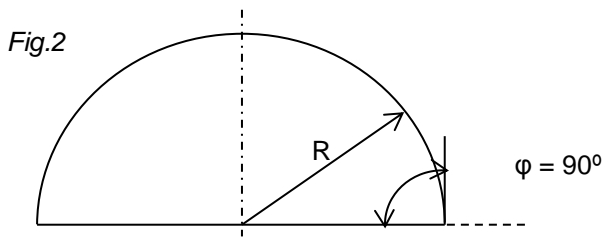
Geometría: espesor reducido, es decir que sea lo más parecido a una membrana para que no aparezcan otros esfuerzos ni otras perturbaciones (esfuerzos de flexión en las placas por ejemplo) que no sean los esfuerzos normales de compresión o de tracción.

La superficie deberá ser continua, sin cambios bruscos de curvatura, sin aberturas excesivas que produzcan perturbaciones.

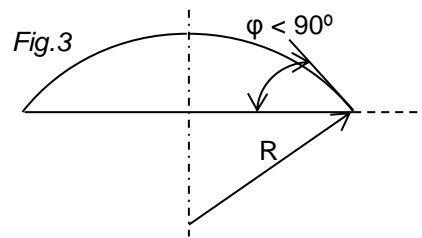
Cargas: deberán ser distribuidas lo más uniformemente posible. Se deberá evitar cargas concentradas puntuales o lineales.

Apoyos: deberán respetar el funcionamiento membranal, ubicándose en los bordes de la lámina, ya sea siguiendo la dirección de la tangente a los meridianos, en cuyo caso la fundación es directa, o bien mediante columnas no coincidentes con dichas tangentes (por ejemplo verticales), en cuyo caso se requerirá de anillos de borde a efectos de equilibrar todo esfuerzo que no sea vertical.

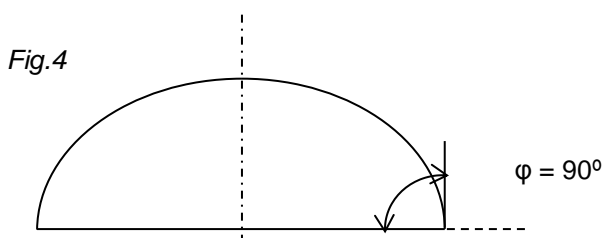
FORMAS TÍPICAS DE CÚPULAS



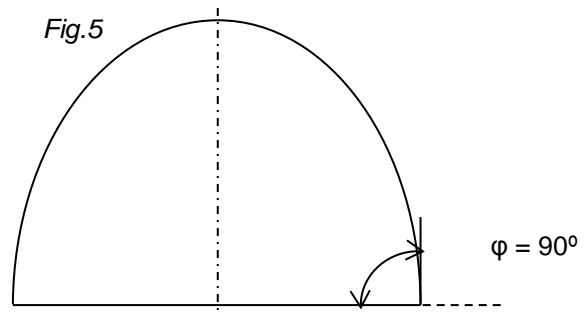
Semiesférica: es la más simple desde el punto de vista del replanteo.  $R=cte.$



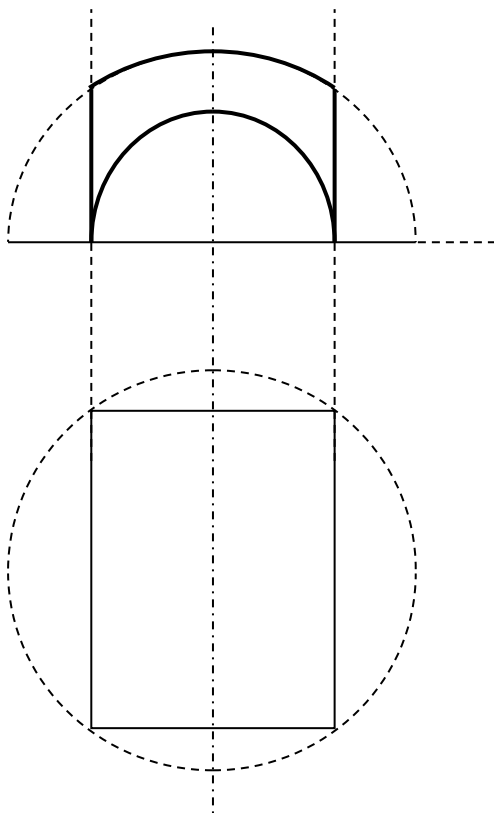
Semiesférica:  $R=cte.$



Elíptica: son más achatadas, menos altura.  $R=variable$

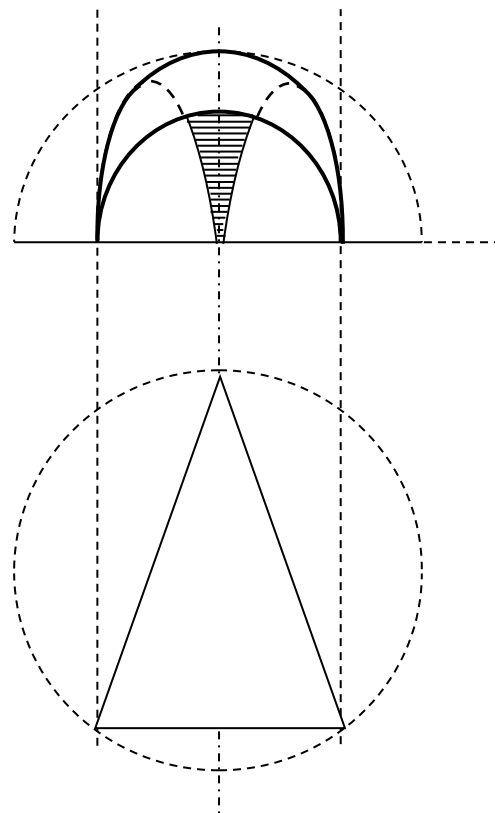


Parabólicas: son más puntiagudas, mayor altura.  $R=variable$



Semiesférica: planta rectangular.  $R=cte.$

Fig.6



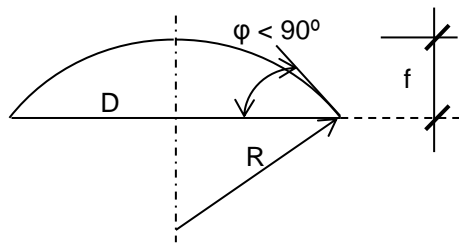
Semiesférica: planta triangular.  $R=cte.$

Fig.7

## CAMPO DE APLICACIÓN

Para cúpulas de hormigón armado se indica en la Tabla N° 1, las relaciones aconsejables entre la flecha y el diámetro de la planta para las distintas dimensiones de la cúpula.

Fig.8



Semiesférica:  $R = \text{cte.}$

Tabla N° 1

Diámetro	$\varphi$	f/D	Tipos de Láminas
30 m	de 20° a 30°	1/8	LLENAS
60 m	de 30° a 35°	1/7	LLENAS O NERVURADAS
90 m	de 35° a 40°	1/6	NERVURADAS
120 m	40°	1/5	HUECA DE DOBLE CAPA

No conviene adoptar diámetros de la planta menores a 30,00 metros aunque requiera espesores mínimos, porque el costo del encofrado las torna poco económicas. Para diámetros pequeños (de 10,00 m a 15,00 m) se utilizan cúpulas cónicas.

Los espesores que se utilizan varían entre 6 cm y 10 cm. Espesores menores no convienen porque no permiten alojar las armaduras con el recomendable recubrimiento. En caso de necesitarse mayores espesores, se recurre al nervurado de la lámina.

Pueden utilizarse otros materiales, como acero o aluminio. Las de acero son tres veces más pesadas que las de aluminio, aunque estas últimas no requieren conservación. De cualquier modo, la competitividad económica entre unas y otras estará dado por los precios relativos de los materiales.

Para cúpulas engrilladas de una sola napa (grillas de una capa) el diámetro de la planta puede llegar a los 80,00 metros. Para luces mayores, se puede recurrir a estructuras metálicas formadas por arcos reticulados desarrollados en los planos meridianos y paralelos.

También se conocen cúpulas de plásticos, pero de luces del orden de los 30,00 metros. Este material tiene menor vida útil frente a los convencionales.

Las cúpulas de ladrillos son de luces relativamente reducidas, de muy poco uso en los últimos años con la salvedad de las realizadas por el Ingeniero Dieste que utilizando el ladrillo cerámico ha desarrollado algunas cúpulas de singular importancia.

## Aspectos constructivos

Las cúpulas de hormigón armado requieren encofrados, los cuales pueden ser de madera, metálicos, de plástico, etc.

Los encofrados de madera tienen sus costos, los que hay que evaluar, sobre todo porque tienen poca (en la mayoría de los casos nula) reutilización. Los metálicos son particularmente costosos.

Hasta los 30,00 metros pueden utilizarse membranas inflables (Sistema Bini-Shell). Se posicionan y una vez endurecido el hormigón, se desinflan y pueden destinarse a nuevos usos.

Se registra un caso en que el encofrado lo formó un terraplén de tierra (bien consolidado) construido con el perfil de la cúpula. Una vez fraguado el hormigón, se retiró la tierra y quedó liberada la planta.

Las estructuras metálicas engrilladas son de fácil y rápido armado. Si se elige el modelo conveniente, por ejemplo de malla triangular o hexagonal, se puede reducir el número de piezas a ensamblar, lo que facilita el montaje y reduce costos.

Las pendientes con ángulos mayores a 45° requieren doble encofrado para evitar el escurrimiento del hormigón fresco, los cuales siempre serán de consistencia seca, de baja relación agua/cemento, y de agregados pétreos con tamaño máximos "reducidos".

Cabe el empleo del sistema de "gunite" (mortero proyectado a alta presión mediante aire comprimido).

Fig. 9 - Calota esférica

Como ya se dijo anteriormente, la calota esférica (Fig.9) es una bóveda de rotación. Las secciones paralelas a los bordes son circunferencias concéntricas, es decir, con radios crecientes desde el borde al centro.

Si dividimos una calota en gajos y observamos la deformada que adquieren bajo su propio peso, vemos que por encima de un determinado paralelo los gajos se deforman hacia el interior de la geometría esférica original, mientras que por debajo de dicho paralelo, lo hacen hacia afuera. Ver Fig. 10 a y b

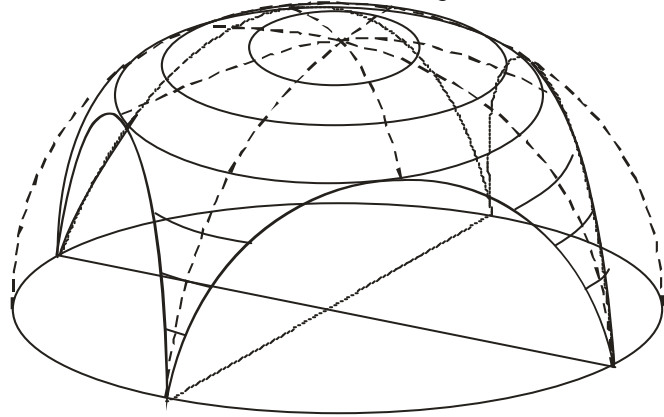


Fig. 10 a - Deformada

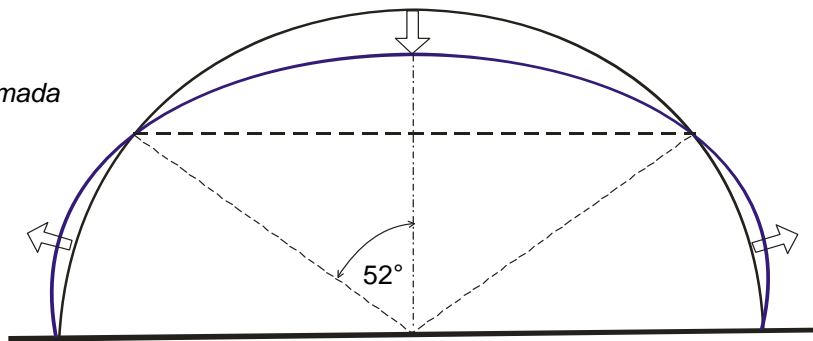
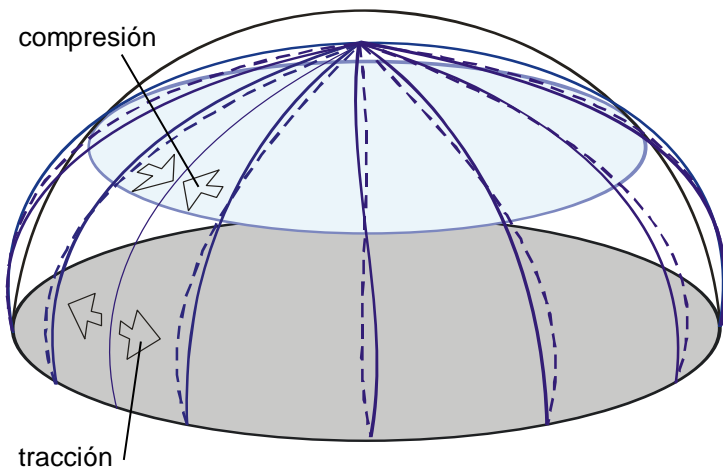


Fig. 10 b



Estas deformaciones se deben a los esfuerzos de flexión que se originan, dado que los gajos no son antifuniculares de su peso. El sentido de las deformadas se invierte a unos 52° medidos desde la clave.

En una calota, la tendencia de los gajos a superponerse en la parte superior y a separarse en la parte inferior se ve impedida por la continuidad de los paralelos. Esto origina esfuerzos de compresión en la parte superior y esfuerzos de tracción en la parte inferior. Fig. 11 a y b.

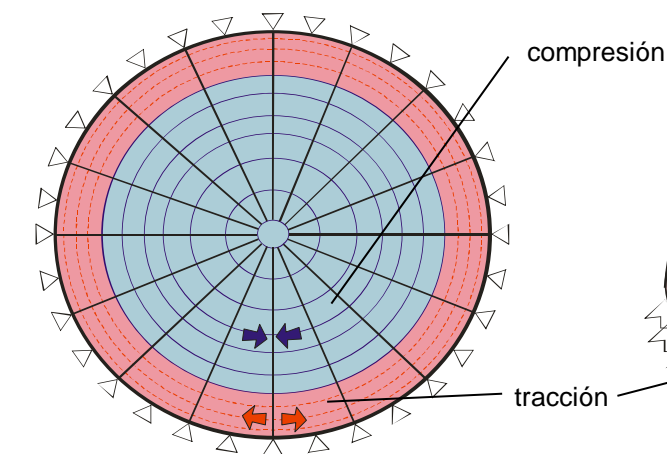


Fig. 11 a

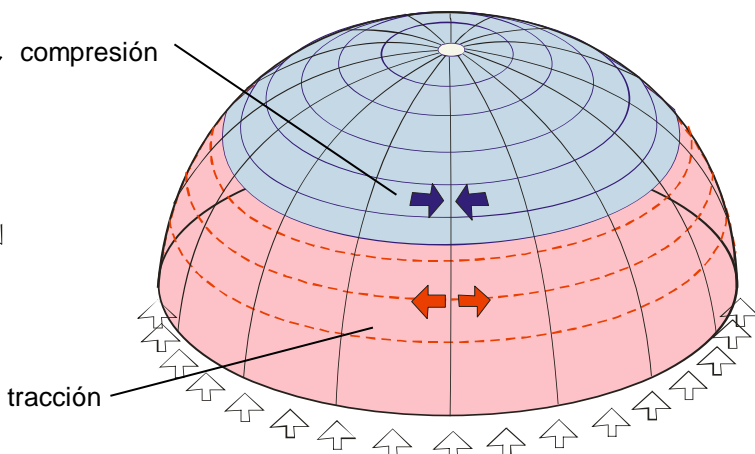


Fig. 11 b

**ESTÁTICA DE LAS CÚPULAS ESFÉRICAS**  
Cuadro de solicitaciones en la cúpula esférica:

El radio será:

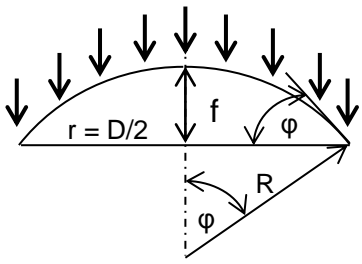
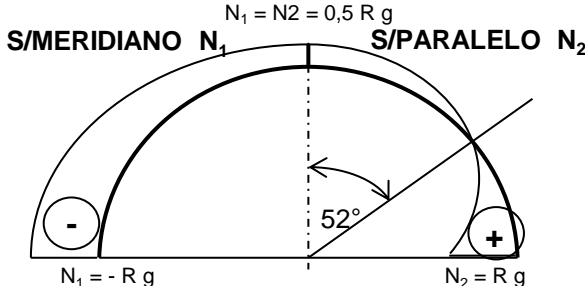
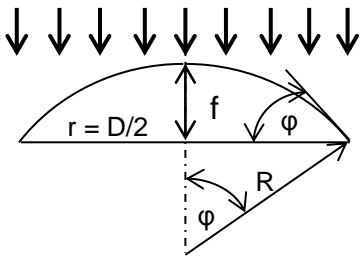
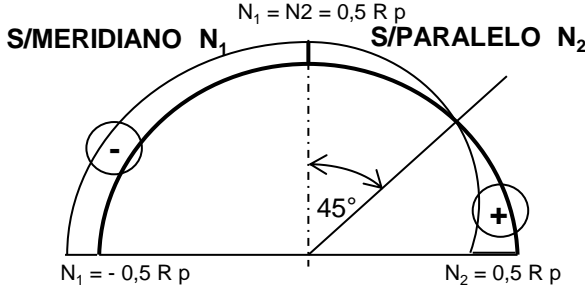
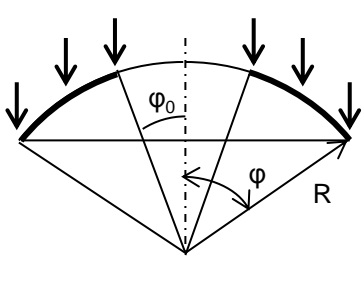
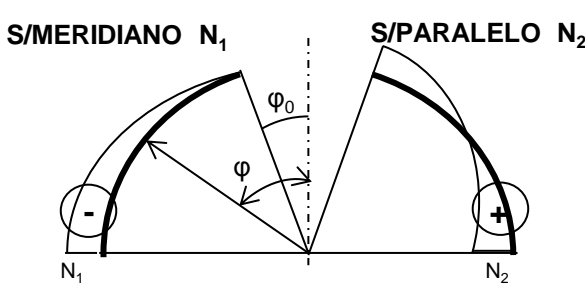
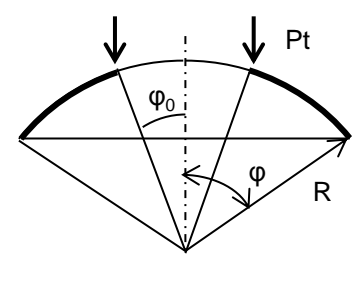
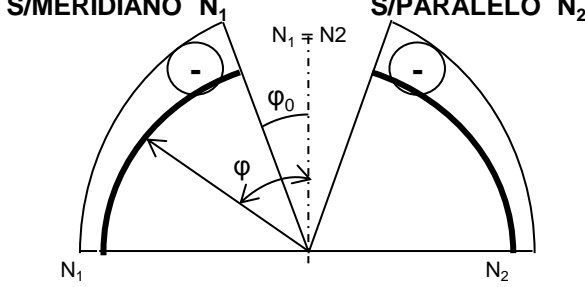
$$R = \frac{D^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2}$$

R: radio de curvatura (constante)

D: diámetro de las planta

f: flecha

**TABLA Nº 1**

ESQUEMA DEL SISTEMA	S/MERIDIANO $N_1$ S/PARALELO $N_2$	DIAGRAMA DE ESFUERZOS
 <p>g: peso propio</p>	$N_1 = - \frac{R \cdot g}{1 + \cos \varphi}$ $N_2 = -R \cdot g \left[ \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right]$	 <p><math>N_1 = N_2 = 0,5 R g</math> <math>N_1 = - R g</math>      <math>N_2 = R g</math></p>
 <p>p: carga accidental</p>	$N_1 = - \frac{R \cdot p}{2}$ $N_2 = - \frac{R \cdot p}{2} \cos 2\varphi$	 <p><math>N_1 = N_2 = 0,5 R p</math> <math>N_1 = - 0,5 R p</math>      <math>N_2 = 0,5 R p</math></p>
	$N_1 = - \frac{R \cdot g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi}$ $N_2 = -N_1 - R \cdot g \cos \varphi$	 <p><math>N_1</math>      <math>N_2</math></p>
	$N_1 = - \frac{Pt}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sin \varphi}$ $N_2 = N_1$	 <p><math>N_1 \neq N_2</math> <math>N_1</math>      <math>N_2</math></p>

De la TABLA N° 1 podemos obtener los esfuerzos  $N_1$  y  $N_2$  (según los meridianos y los paralelos), los cuales se indican en las Fig. 12 y 13

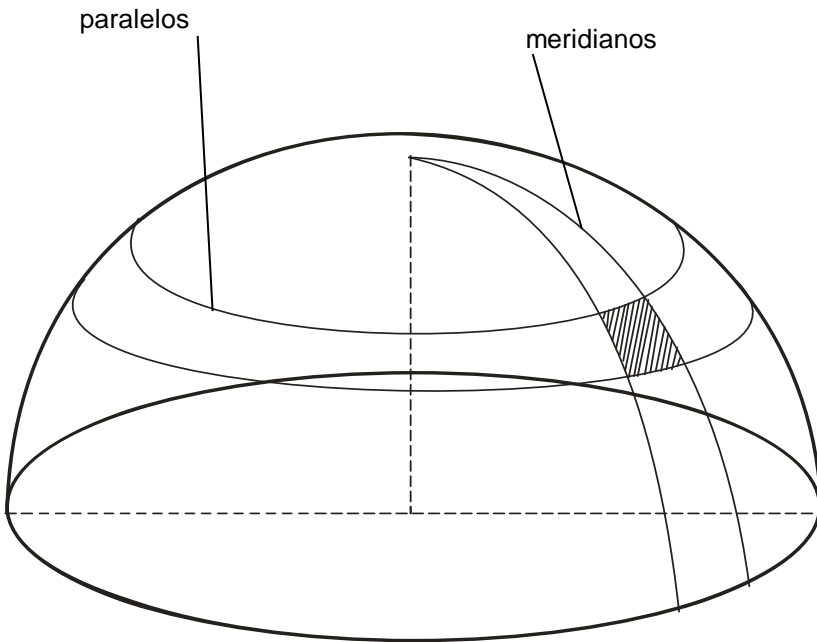


Fig. 12

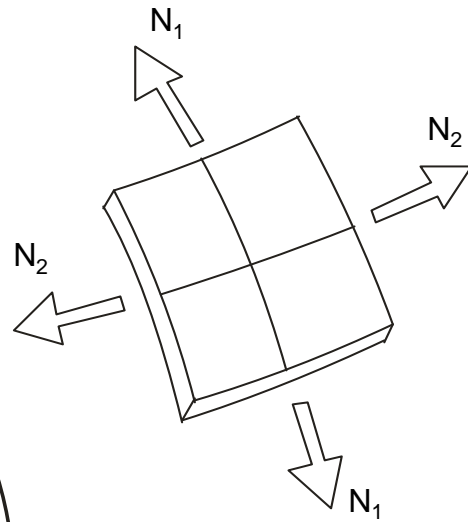


Fig. 13

Una vez calculados los esfuerzos  $N_1$  y  $N_2$ , debemos verificar que las máximas tensiones de compresión  $\sigma'b$ , que se originan con la mayor de las fuerzas, no sobrepase las tensiones admisibles del material.

$$\sigma'b_1 = \frac{N_1}{t \text{ (cm)} \times 100 \text{ cm}} < \sigma'b_{\text{adm}} \quad \sigma'b_2 = \frac{N_2}{t \text{ (cm)} \times 100 \text{ cm}} < \sigma'b_{\text{adm}}$$

Además, se deberá colocar una armadura con una cuantía mínima de  $\omega_0 = 0,5\%$  para absorber los esfuerzos de tracción por variaciones de temperatura, contracciones de fragüe, flexiones debidas a eventuales cargas concentradas o perturbaciones de bordes.

$$F_e \text{ (cm}^2\text{)} = 0,005 \times t \text{ (cm)} \times 100 \text{ cm}$$

Para absorber los esfuerzos de tracción según los paralelos, se deberá proveer armaduras, que deberán distribuirse en el ancho de 1 m (dado que el esfuerzo  $N_2$  es por metro). Esta armadura nunca inferior a una cuantía del 0,6%

$$F_{e_{\text{ANULAR}}} \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{N_2 \text{ (kg)}}{\sigma_{e_{\text{adm}}} \text{ (kg/cm}^2\text{)}} \geq 0,006 \times t \text{ (cm)} \times 100 \text{ cm}$$

Las armaduras, sean principales o de repartición, llevarán las direcciones de los paralelos y de los meridianos e irán por el centro del espesor de la lámina.

## VERIFICACIÓN AL PANDEO

La tensión crítica de pandeo para estas superficies de doble curvatura positiva, se puede determinar mediante la expresión:

$$\sigma_{\text{crít}} = 0,075 \cdot E \cdot \frac{t}{R}$$

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{crít}}}{\gamma} = 0,025 \cdot E \cdot \frac{t}{R} < \sigma'_{\text{b adm}}$$

E = módulo de elasticidad

t = espesor

R = radio de curvatura

$\gamma$  = coeficiente de seguridad. Puede tomarse igual a 3

En el caso de que estas condiciones no se cumplan, corresponde el aumento del espesor (t) o bien, sin aumentar el espesor (t) recurrir al proyecto de láminas nervuradas. Otra solución consiste en disminuir el radio de curvatura modificando el diseño original, aunque es menos usual.

## FUNCIONAMIENTO Y CÁLCULO DEL ANILLO DE BORDE INFERIOR

El apoyo más adecuado para una cúpula semiesférica es el anillo de forma cilíndrica. La reacción tendrá la dirección de la tangente a la lámina, en el borde. Fig. 14 y 15

En ambos casos resulta Reacción:  $R = N_1$  (Kg/m)

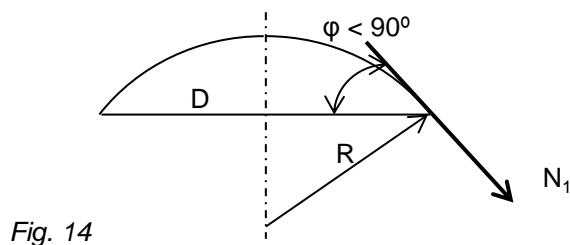


Fig. 14

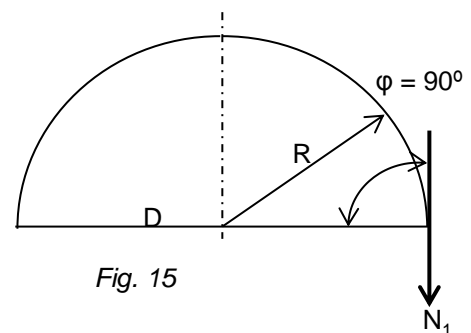


Fig. 15

En el caso de la Fig.14, para una situación donde  $\phi < 90^\circ$ , deberá descomponerse la fuerza  $N_1$  según la vertical y la horizontal. Fig. 16

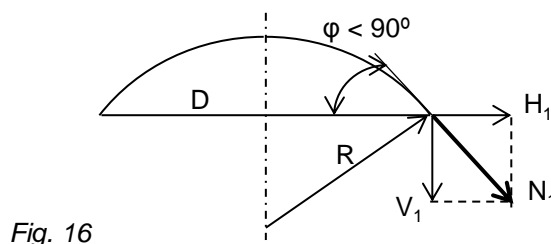


Fig. 16

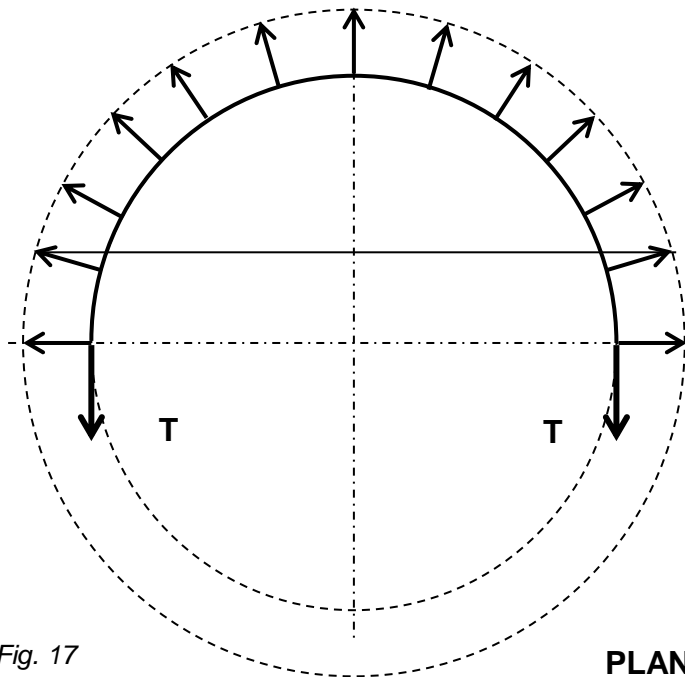
En todos los casos deberá cumplirse que la tensión que produce el esfuerzo  $N_1$  o  $V_1$ , sea menor que la tensión admisible del material, y dado que  $N_1$  ó  $V_1$  (según corresponda) es un esfuerzo por unidad de longitud, queda:

$$\sigma'_{\text{b}_3} = \frac{N_1}{d_1 \text{ (cm)} \times 100 \text{ cm}} < \sigma'_{\text{b adm}}$$

Se puede obtener la dimensión del espesor ( $d_1$ ), conociendo la tensión admisible del material. Este espesor ( $d_1$ ) siempre estará en el orden del espesor (t) o algo menor, por lo que no representa un problema en cuanto a su dimensión:

$$d_1 \text{ (cm)} = \frac{N_1}{\sigma'_{\text{b adm}} \times 100 \text{ cm}}$$

Este caso corresponde, siempre que el anillo de tracción esté apoyado en toda su longitud. Caso contrario (apoyo en columnas separadas unas de otras), será entonces tratado como una viga circular.



La componente  $H_1$ , en el caso en que exista (existe siempre que  $\phi$  sea distinto de  $90^\circ$ ), es un esfuerzo radial que deberá ser resistido por el anillo a tracción.

La sollicitación de tracción vale:

$$T \text{ (kg)} = H_1 \text{ (kg/m)} \times D / 2 \text{ (m)}$$

La Fig.17 muestra la planta del anillo de tracción y las sollicitaciones radiales dibujadas en la mitad de la planta, cuyo equilibrio se obtiene con la fuerza  $T$ .

Fig. 17

PLANTA

Como el hormigón tiene poca resistencia a la tracción, se colocará armadura para tomar esa fuerza.

$$Fe_3 \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{T \text{ (kg)}}{\sigma_{e_{adm}} \text{ (kg/cm}^2\text{)}}$$

En la Fig.18, se ve el detalle de la armadura de un anillo de tracción.

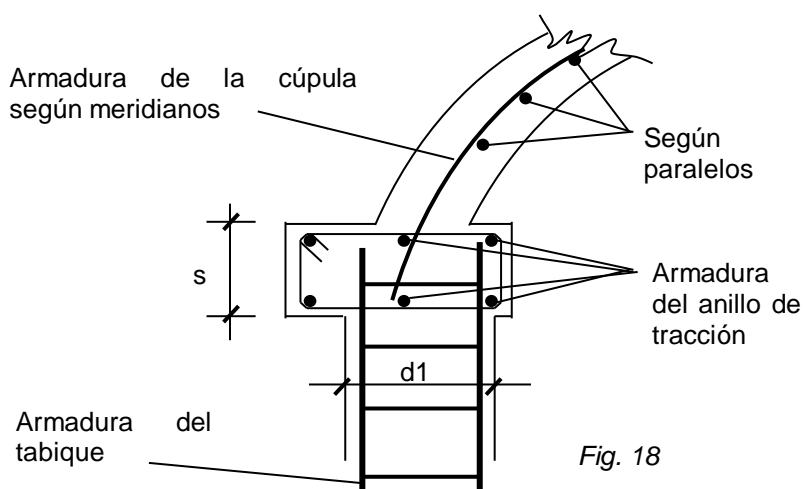


Fig. 18

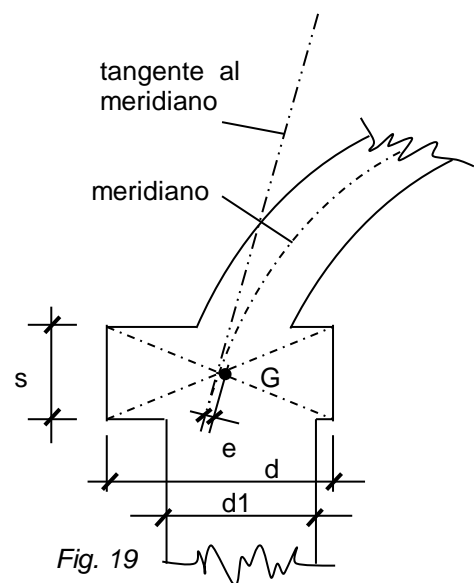


Fig. 19

En este tipo de apoyo es conveniente que coincida el centro de gravedad del anillo ( $G$ ) con la dirección de la tangente al meridiano representativo de la cúpula, para que no aparezca la excentricidad ( $e$ ) que provocará flexiones en el anillo. Fig.19



### FUNCIONAMIENTO Y CÁLCULO DEL ANILLO DE BORDE SUPERIOR

Si la cúpula tiene una abertura cenital Fig.20, y en ella apoya verticalmente un lucernario, la carga  $P$  (kg/m) Fig.21 no coincide con la dirección de la tangente a la lámina, por lo tanto debe descomponerse en dos direcciones Fig.22. Una es la dirección de la tangente al meridiano ( $N_{1P}$ ), que deberá tenerse en cuenta cuando se verifiquen las tensiones originadas por el esfuerzo ( $N_1$ ) del peso propio. La otra dirección será la dirección horizontal  $H_2$ , cuyo esfuerzo deberá tomarse con un anillo de compresión. En la Fig.23 se muestra el Polígono de Fuerzas para obtener  $H_2$

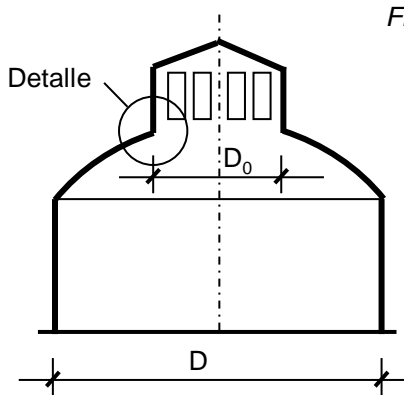


Fig. 20

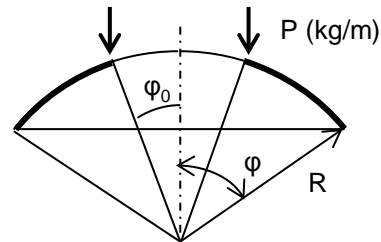


Fig. 21

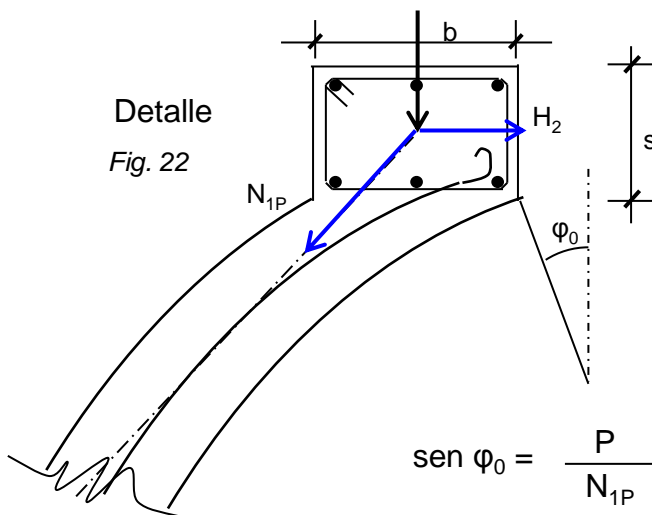
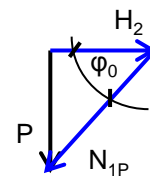
Detalle  
Fig. 22

Fig. 23

Polígono de fuerzas

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{P}{N_{1P}} \quad \Rightarrow \quad N_{1P} = \frac{P}{\text{sen } \varphi_0}$$

$$\text{tan } \varphi_0 = \frac{P}{H_2} \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{P}{\text{tan } \varphi_0}$$

El anillo se calcula con una fuerza  $C$ :

$$C \text{ (kg)} = H_2 \text{ (kg/m)} \times D_0 / 2 \text{ (m)}$$

Y se dimensiona como si fuese una columna:

$$C \text{ (kg)} \times \gamma = F_b \text{ (cm}^2\text{)} \times \sigma'_{bk} \text{ (kg/cm}^2\text{)} + F_e \text{ (cm}^2\text{)} \times \sigma_{ek} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$C \text{ (kg)} \times \gamma = F_b \text{ (cm}^2\text{)} \times [\sigma'_{bk} \text{ (kg/cm}^2\text{)} + \mu_0 \times \sigma_{ek} \text{ (kg/cm}^2\text{)}]$$

$$F_b \text{ (cm}^2\text{)} = s \times b = \frac{C \text{ (kg)} \times \gamma}{[\sigma'_{bk} \text{ (kg/cm}^2\text{)} + \mu_0 \times \sigma_{ek} \text{ (kg/cm}^2\text{)}]}$$

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 2,5 \\ \mu_0 &= 1\% \end{aligned}$$

### APOYOS AISLADOS

En el caso de que los apoyos sean aislados, la lámina funciona (en las proximidades del borde) como una viga de gran altura.

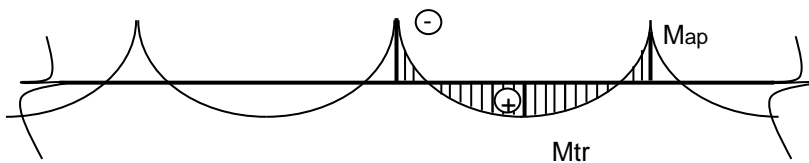
$$H = L / 2$$

$$L = \pi D / n^{\circ} \text{ de columnas}$$

H = altura aproximada de la viga

H será la altura a tomar para dimensionar la viga circular. (recordar que z puede tomarse como un porcentaje de H). En la viga (circular) aparecen esfuerzos de torsión.

Se indica los valores de los momentos flectores en el apoyo y en el tramo, como así la armadura correspondiente.



$$z = 2 / 3 \cdot H$$

z : brazo de palanca

$$M_{ap} = N_1 \cdot L^2 / 10$$

$$M_{tr} = N_1 \cdot L^2 / 14$$

$$F_{e_{ap}} \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{M_{ap} \text{ (kgm)}}{z \text{ (m)} \cdot \sigma_{e_{adm}} \text{ (kg/cm}^2\text{)}}$$

$$F_{e_{tr}} \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{M_{tr} \text{ (kgm)}}{z \text{ (m)} \cdot \sigma_{e_{adm}} \text{ (kg/cm}^2\text{)}}$$

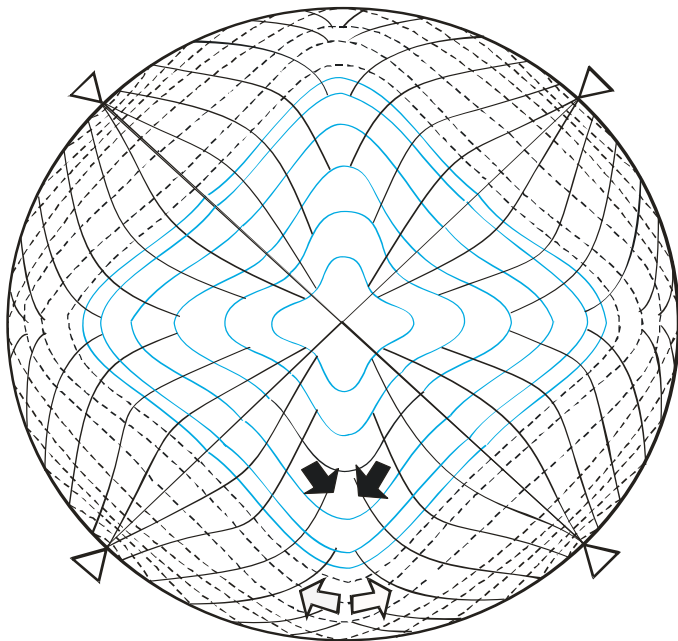


Fig. 24

**PLANTA**

Las Fig. 24 y 25 muestran las isostáticas de tracción y de compresión para un cúpula con apoyos discretos (no continuos)

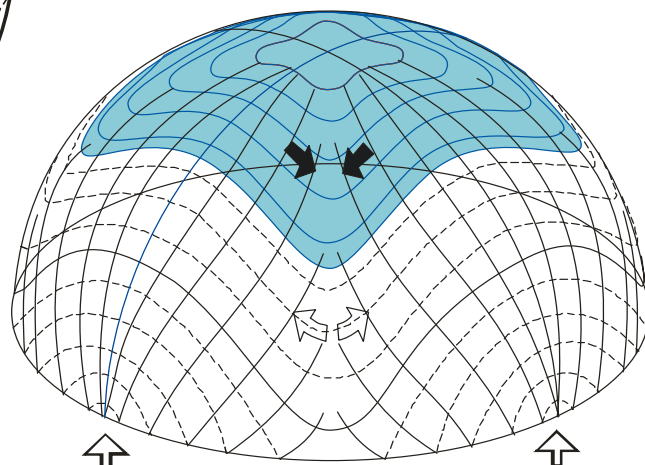


Fig. 25

**VISTA PERSPECTIVADA**