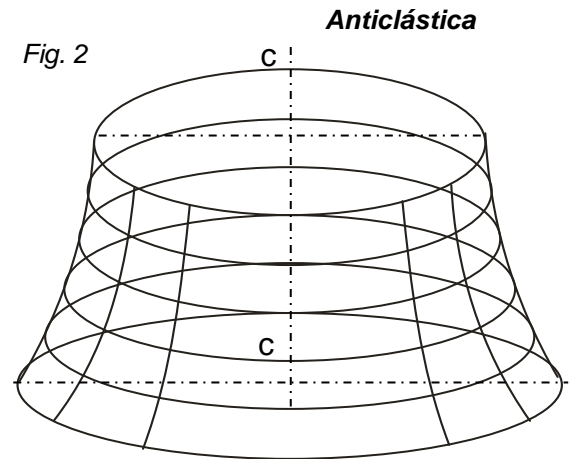
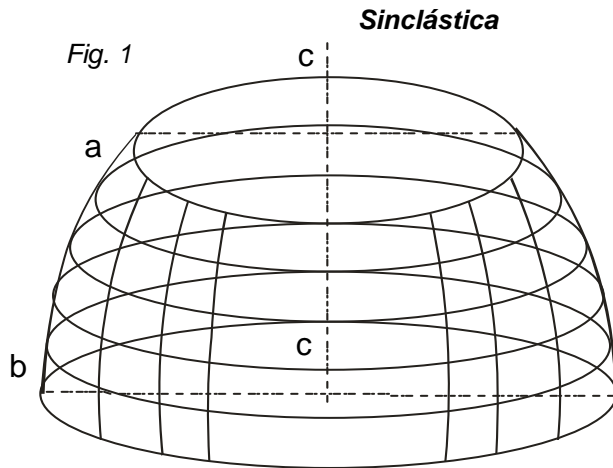


| | | | |
|---|---|-------------------------|--------------------|
| UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO | | | |
| DNC GE | Cátedra: ESTRUCTURAS - NIVEL 3 - PLAN VI | | |
| | Taller: VERTICAL III - DELALOYE - NICO - CLIVIO | | |
| | Guía de Estudio: Láminas Sinclásticas | | |
| Curso 2014 | Elaboró: JTP Ing. Angel Maydana | Revisión: Ing. Delaloye | Fecha: agosto 2014 |

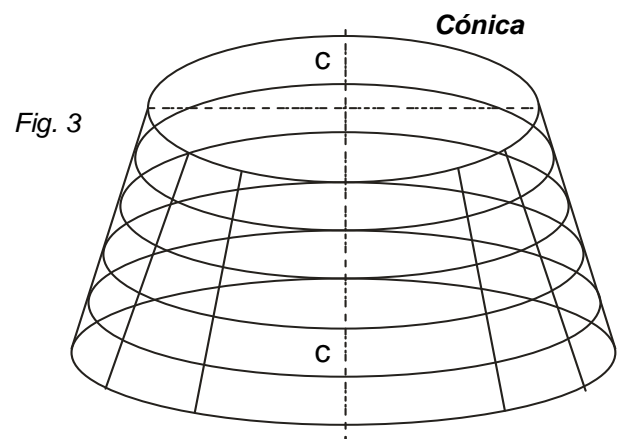
LÁMINAS SINCLÁSTICAS

Son superficies de doble curvatura gauss positiva.

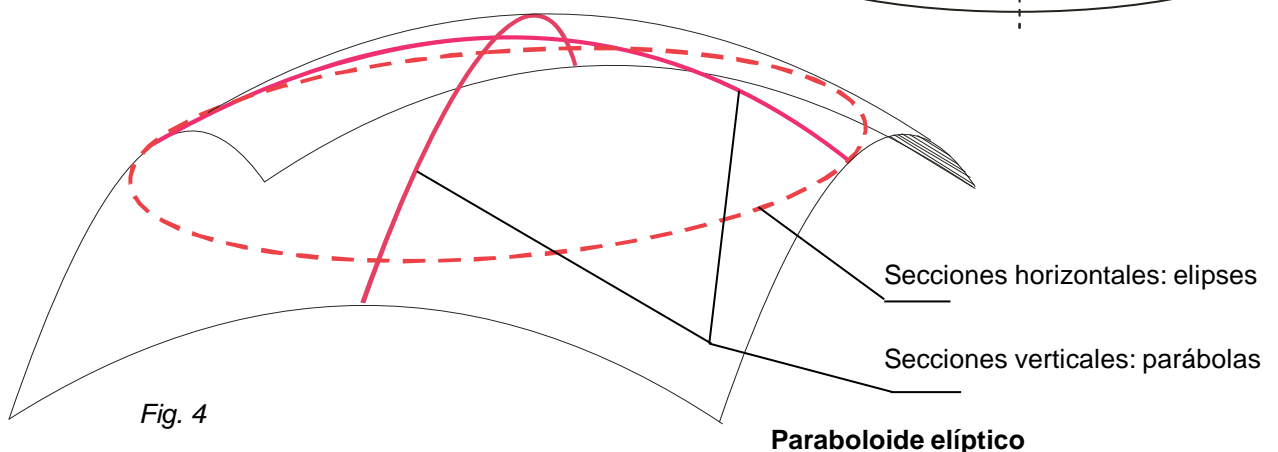


Consideremos por ejemplo, la Fig.1, un arco de círculo a-b, y lo hacemos girar alrededor de un eje c-c situado del mismo lado de la curvatura. Se obtiene una superficie sinclástica. Si el eje de rotación está del lado opuesto al centro de curvatura, resulta una superficie anticlástica. Fig.2

Por último, si el centro de curvatura se aleja al infinito, resulta una superficie cónica, o sea de simple curvatura. Fig.3



Superficies Elípticas.
Superficies sinclásticas (curvaturas gauss positivas) cuyas curvas de nivel (plano horizontal) son elipses. También se las llama superficies elípticas. Fig.4
Es una bóveda de traslación



BÓVEDAS DE TRASLACIÓN

Se trata de una superficie engendrada por una curva vertical (A) GENERATRIZ, que se desliza sobre otra curva vertical (B) DIRECTRIZ. Fig. 5

Todas las secciones verticales paralelas son idénticas, lo cual simplifica el encofrado. El arco de círculo se adapta bien a estos fines, tanto por la facilidad de su replanteo como para la construcción de la cimbra.

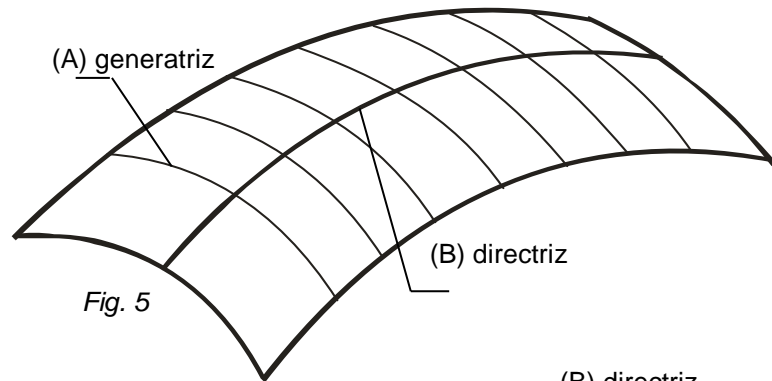


Fig. 5

En la Fig.6 se muestra una bóveda de traslación circular. Si se hace tender a infinito el radio r de curvatura de la generatriz, es decir $f = 0$ (correspondiente a r), tendremos una lámina cilíndrica. Esta no es más que un caso particular de las láminas de traslación (caso en que la generatriz es una recta), es decir que la lámina cilíndrica es una superficie de simple curvatura.

En cambio la bóveda de traslación, cuando tanto la directriz como la generatriz son curvas, son superficies de doble curvatura.

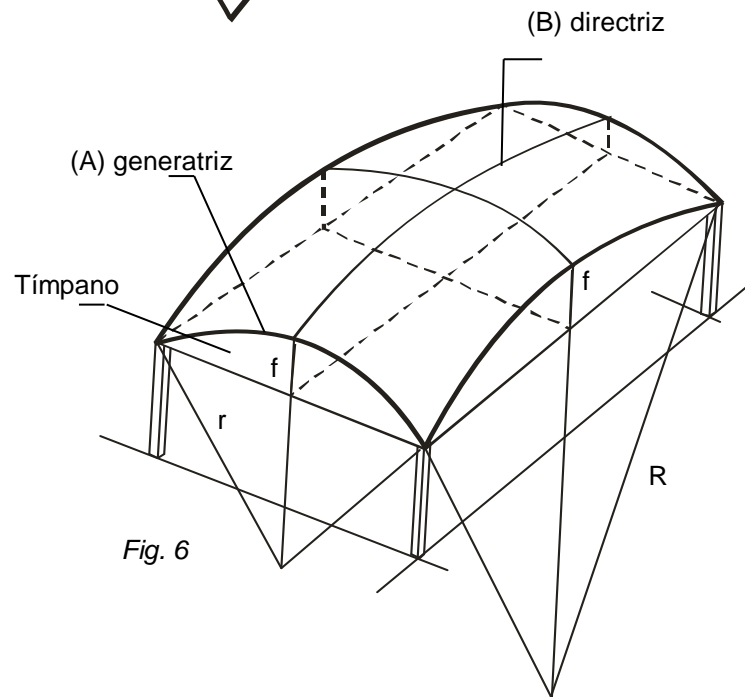


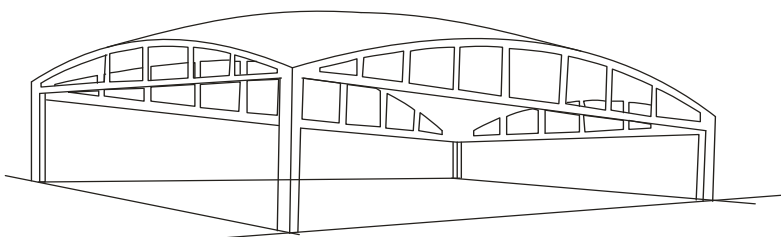
Fig. 6

Las superficies a doble curvatura gozan de propiedades que las hacen particularmente aptas para cubrir importantes luces con espesores mínimos. Tales propiedades provienen de la capacidad que tienen de soportar cualquier sistema de cargas distribuidas exteriores, trabajando a régimen de esfuerzos membranales, es decir, contenidos en el plano tangente. El material en tal régimen, está sometido a esfuerzos normales (de tracción o compresión) y tangenciales, uniformes en el espesor de la lámina.

Las bóvedas de traslación tienen, a pesar de su doble curvatura, la particularidad de prestarse a cubrir plantas rectangulares.

Las láminas apoyan en tímpanos según los cuatro lados del rectángulo.

Fig. 7



Los tímpanos pueden ser atirantados, como el de la Fig.7, para permitir el paso de la luz.

La rigidez de estos elementos de apoyo debe ser tal que en el plano vertical no permitan desplazamientos de la lámina, pero lo suficientemente flexibles en su propio plano como para no reaccionar horizontalmente.

BÓVEDA DE TRASLACIÓN CIRCULAR PLANTA RECTANGULAR (En particular: cuadrada)

Una superficie de traslación circular, limitada por cuatro planos verticales, materializados con tímpanos, determinan una estructura espacial, capaz de transmitir las cargas a los cuatro vértices a través de pequeñas tensiones. Fig. 8

La superficie se forma por una generatriz de radio r , se desplaza sobre una directriz de radio r . Todas las secciones paralelas a los bordes son circunferencias de radio r . Los arcos de borde pueden tener, si así se desea, igual flecha, aún con diferente luz.

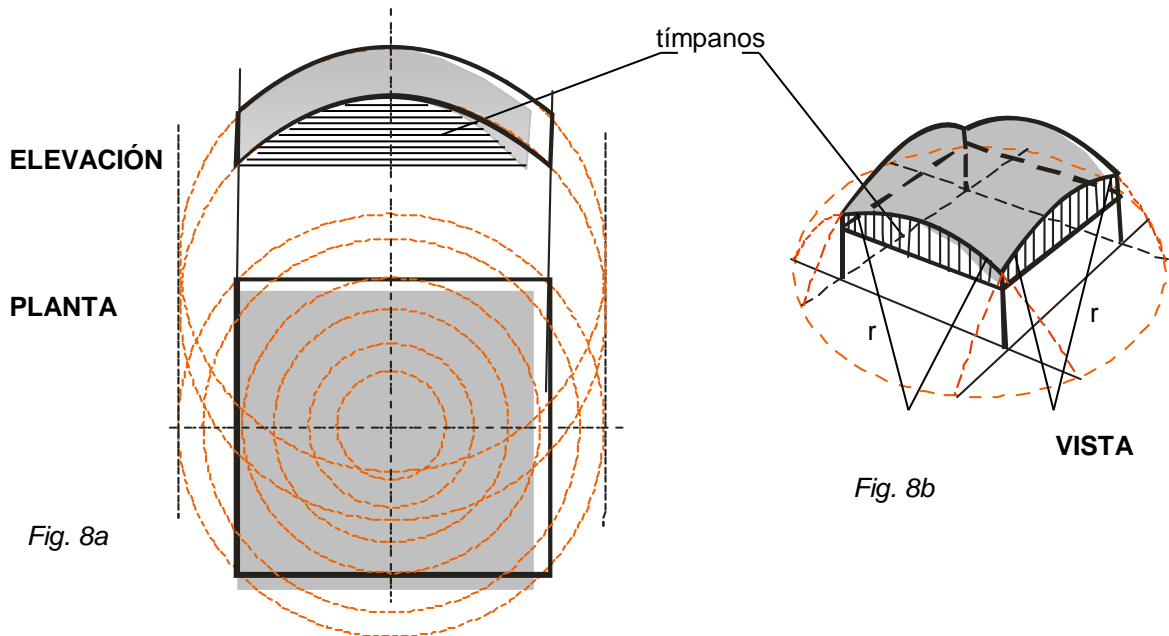


Fig. 8a

Fig. 8b

Fig. 8c

Por ejemplo, para una planta cuadrada de 40 m de lado, el espesor de la cubierta será de 6 cm, aumentando hasta 9 cm en los vértices. La disposición de la armadura se indica en la Fig. 8c

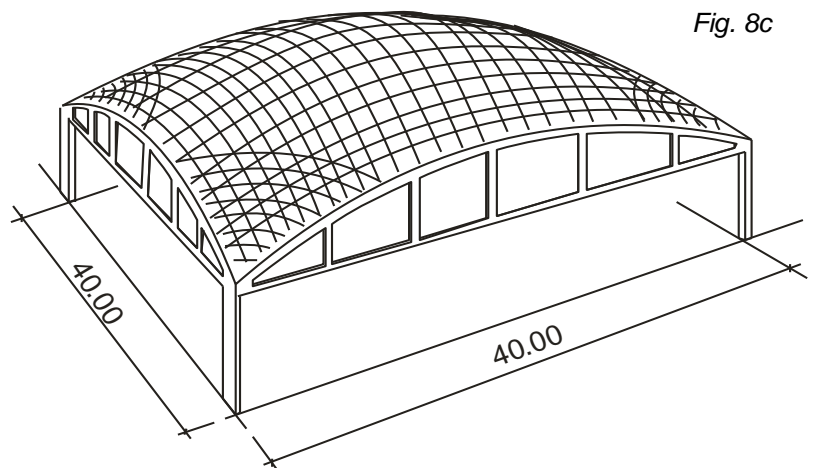
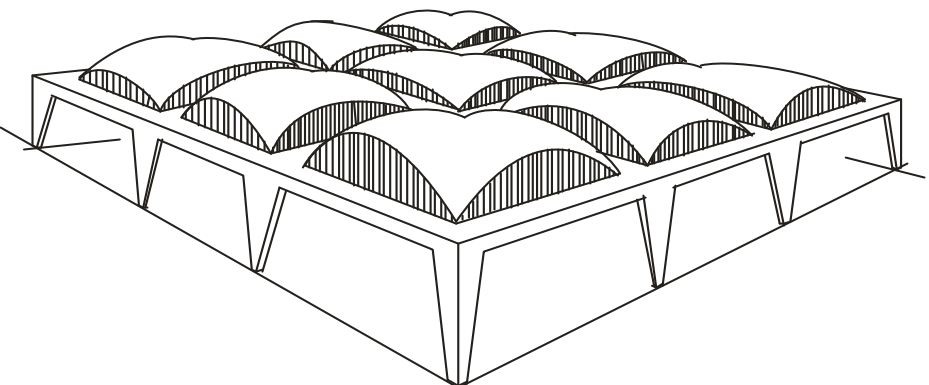


Fig. 9

En el caso de tener que cubrir una superficie tal, que requiera la utilización de una batería de estas cúpulas (por ejemplo, la Fig.9, una planta de 100 m por 100 m), la disposición adoptada de nueve cúpulas permite resolver el problema de iluminación de forma adecuada y utilizar sólo cuatro columnas interiores.



La calota esférica es una bóveda de rotación. Las secciones paralelas a los bordes son circunferencias concéntricas, es decir, con radios crecientes desde el borde al centro.

Para tener cimbras iguales, ellas deben disponerse radialmente.

Para planta rectangular, los arcos de borde tienen diferentes flechas.

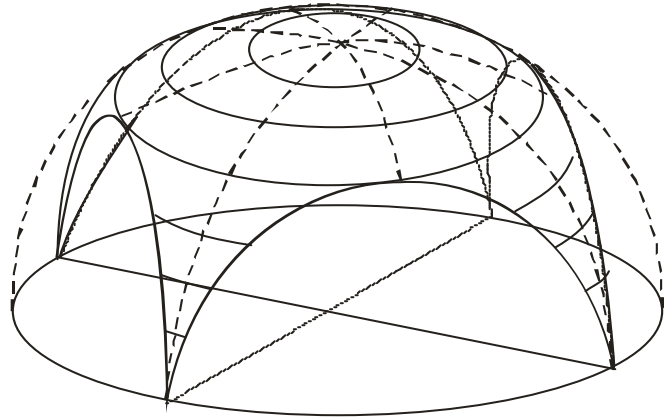


Fig. 10 - Calota esférica

Otro ejemplo de cúpula esférica, en este caso para cubrir una planta triangular, apoyada sobre tres articulaciones separadas 50 m, fue diseñada por el arquitecto Eero Saarinen (1910-1961) para el Auditorio Kresge del Instituto de Tecnología de Massachussetts (Boston). Figs.

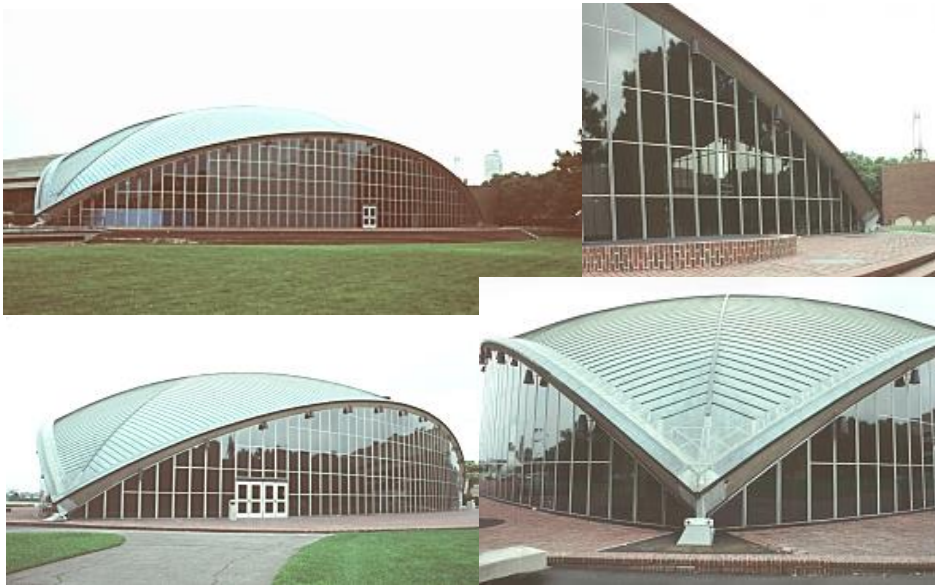


Fig. 11 - Auditorio Kresge - Instituto de Tecnología de Massachussetts

Otro caso similar es un sector de superficie tórica. Éste se genera por un arco de circunferencia (G) que se traslada sobre otro arco de circunferencia (D) al cual se mantiene siempre perpendicular. Las diferentes posiciones de (G) son los meridianos del toro, en tanto que los arcos paralelos a (D) son todos de radios distintos. Fig. 12 y 13

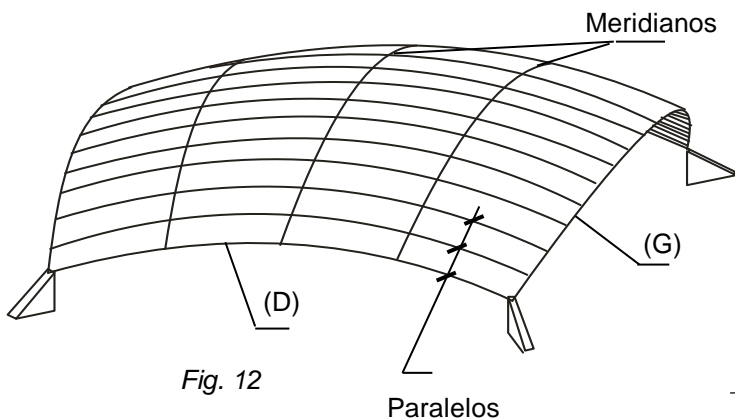


Fig. 12

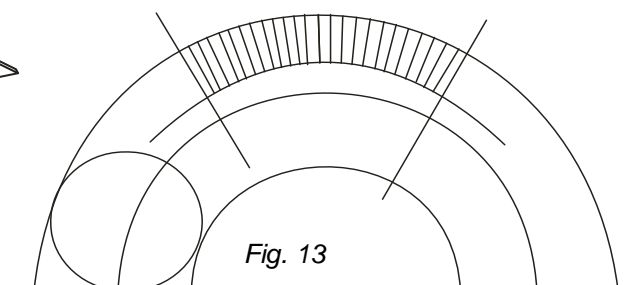


Fig. 13

ESTÁTICA DE LAS BÓVEDAS DE TRASLACIÓN

Cuando se proyecta cubrir un espacio rectangular ($L_1 \times L_2$), con una lámina de traslación (Fig.14) se adoptarán los peraltes f_1 y f_2 en el orden de $L/10$ de la respectiva luz. Se elegirán luego las curvas directrices y generatrices. Las más comúnmente utilizadas son la parábola y el arco de circunferencia. Esta última, por razones de comportamiento estructural y de practicidad constructiva, es la recomendable.

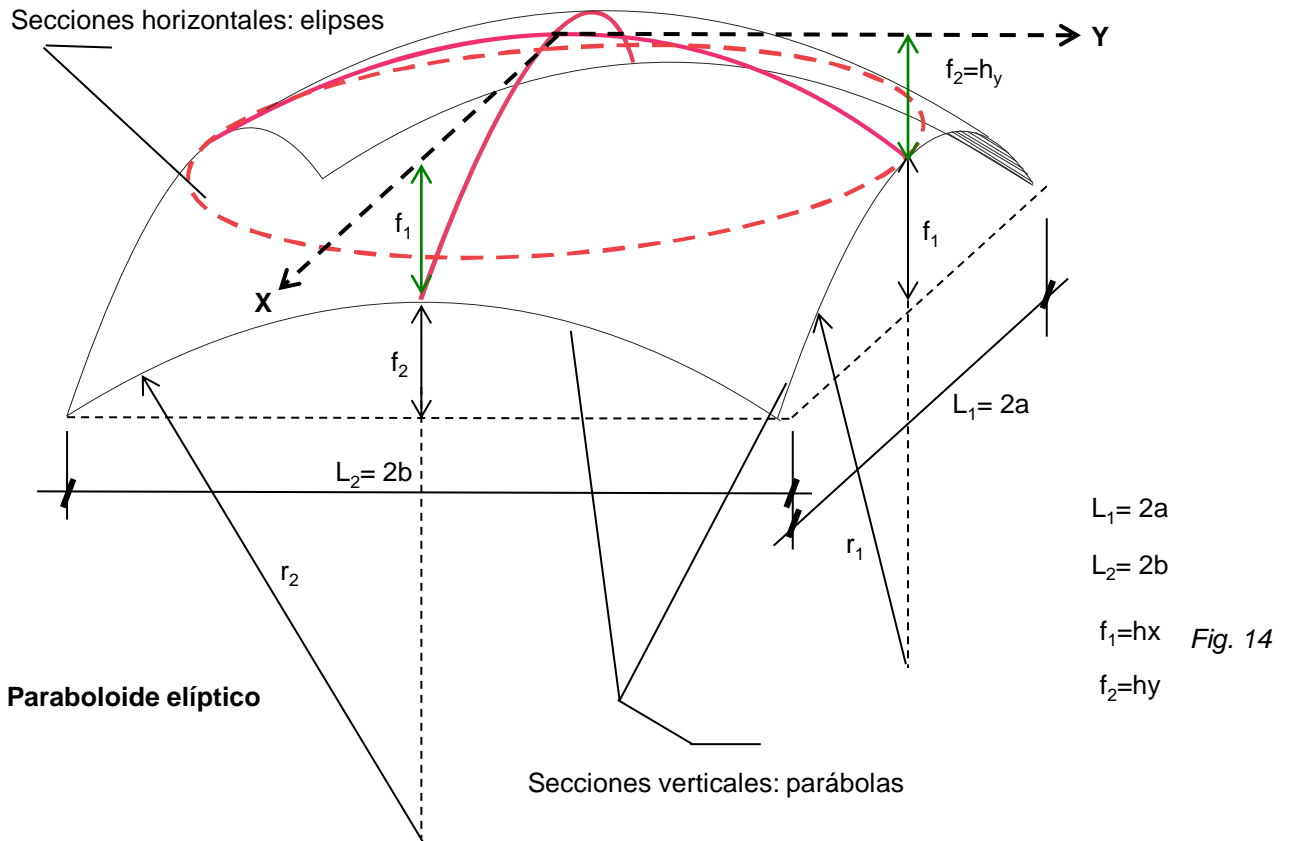


Fig. 15

Cualquiera fuese la forma, los esfuerzos internos en un punto cualquiera serán N_x, N_y, T

Por condiciones de simetría, los esfuerzos tangenciales T se anularán sobre los ejes X e Y , en tanto que los esfuerzos normales N_x serán nulos en los bordes paralelos al eje Y (borde AC); y los N_y se anularán en los bordes paralelos al eje X (borde BC).
Fig.15

Esto resulta del hecho de haber adoptado para los elementos de borde, estructuras de gran rigidez en su plano (como para impedir deformaciones verticales de la lámina), pero sin rigidez fuera de él.
Para una planta cuadrada ($L_1 = L_2$), y de iguales flechas ($f_1 = f_2$), los esfuerzos resultarán, para el caso de carga uniforme q :

Esfuerzos en puntos característicos particulares de la bóveda de traslación circular de bajo reralte

| | |
|----------|--|
| Punto 0: | $N_x = N_y = q \times R/2$; $T = 0$ donde R es el radio de curvatura de generatriz y directriz en la clave. |
| Punto A: | $N_x = T = 0$; $N_y = q \times R = N_y \text{ máx}$ |
| Punto B: | $N_y = T = 0$; $N_x = q \times R = N_x \text{ máx}$ |
| Punto C: | $N_x = N_y = 0$; $T = 2 \times q \times R = T \text{ máx}$ |

Se puede admitir por aproximación que los N_x varían parabólicamente de 0 a B; lo mismo que los N_y de 0 a A. En consecuencia, el equilibrio del cuadrante OACB, únicamente podrá lograrse admitiendo la existencia de esfuerzos tangenciales a lo largo de los bordes AC y BC

Estos esfuerzos tangenciales crecerán desde cero en los puntos A y B, hasta un máximo en la esquina C. Su variación puede aproximarse mediante una ley parabólica, por lo que puede plantearse la ecuación de equilibrio:

Siendo $R_1 = R_2$
Siendo $L_1 = L_2$

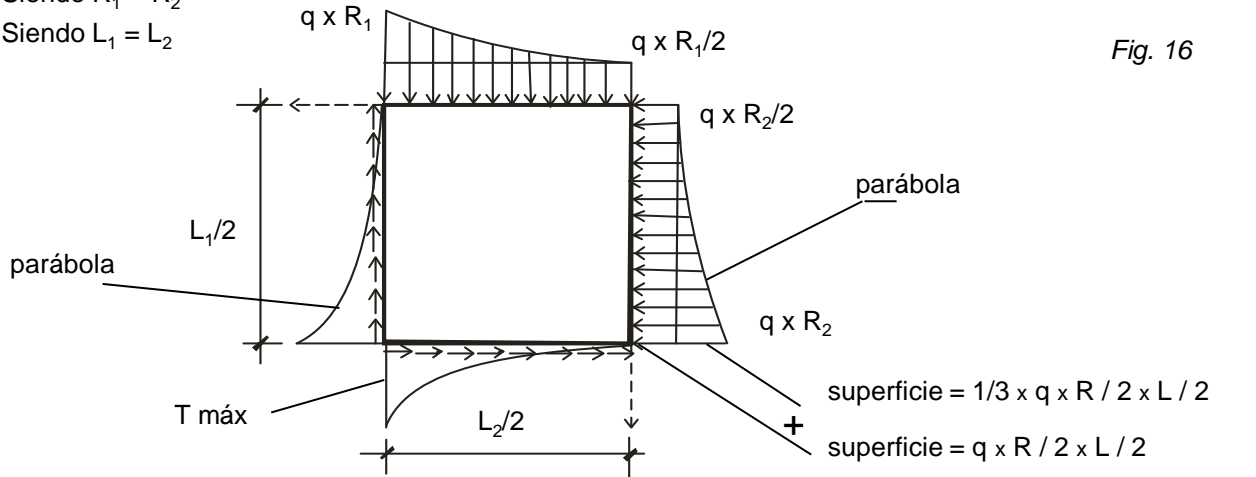


Fig. 16

SUPERF. = $1/3 \times T \text{ máx} \times L / 2$

Siendo $T \text{ máx} = 2.q.R$

SUPERF. = $1/3 \times T \text{ máx} \times L / 2 =$

$= (q \times R / 2 + 1/3 \times q \times R / 2) \times L / 2 = 1/3 \times q \times R \times L$

SUPERF. = $(q \times R / 2 + 1/3 \times q \times R / 2) \times L / 2$

$= 1/3 \times q \times R \times L$

Equilibrio

Se debe hacer notar que la condición de equilibrio planteada es válida únicamente para superficies chatas, es decir con pendiente ϕ reducidas, donde pueda tomarse $\text{sen } \phi = \text{tag } \phi = \phi$; $\text{cos } \phi = 1$

Si se considera el equilibrio de los momentos flectores en la sección transversal media Fig.17, se deduce que por estar la sección de la lámina completamente sometida a esfuerzos de compresión N_x , debe haber tracción en la parte inferior de los diafragmas.

Estos están cargados por esfuerzos tangenciales en el borde superior y sometidos a tracción en el inferior. Fig.18 Ello exige que los diafragmas tengan tensor. Sin embargo puede solucionarse con columnas inclinadas o pórticos de dintel curvo sin tensor.

El esfuerzo principal N_i transmitido a la esquina, debe equilibrarse con la resultante de las fuerzas de tracción Z en los tirantes de los dos diafragmas continuos, de lo contrario exigirá una estructura especialmente diseñada para tomar ese empuje diagonal. Fig.19

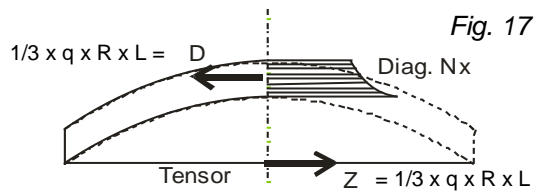


Fig. 17

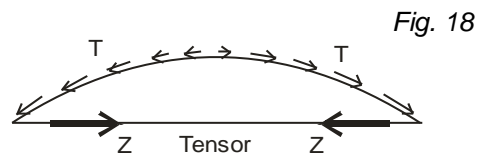


Fig. 18

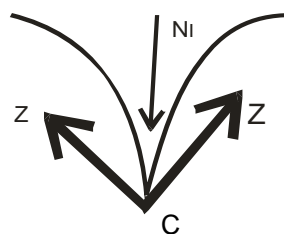


Fig. 19

El esfuerzo en el tensor resulta $Z = 1/3 . q . R . L$

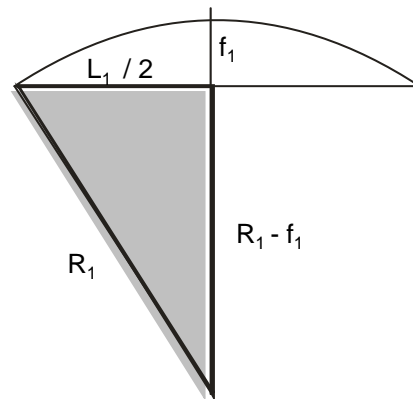
BÓVEDAS DE TRASLACIÓN CIRCULAR

Conocidos L_1 y L_2 , y adoptado los valores de f_1 y f_2 , se calculan los radios R_1 y R_2 :

$$R_1^2 = (L_1/2)^2 + (R_1 - f_1)^2$$

$$R_1 = \frac{(L_1)^2 + 4 \cdot (f_1)^2}{8 \cdot f_1}$$

$$R_2 = \frac{(L_2)^2 + 4 \cdot (f_2)^2}{8 \cdot f_2}$$



Pudiendo expresarse la superficie de la bóveda por la ecuación:

$$z = (R_1 + R_2) - \sqrt{R_1^2 - X^2} - \sqrt{R_2^2 - Y^2}$$

que nos permite replantear la cimbra

Ejemplo numérico

$L_1 = L_2 = 40$ m Se adopta: $f_1 = f_2 = 4$ m

Calculamos los radios: $R_1 = R_2 = \frac{(40)^2 + 4 \times (4)^2}{8 \times 4} = 52$ m

$$z = (52 + 52) - \sqrt{2704 - X^2} - \sqrt{2704 - Y^2}$$

Análisis de cargas:

Se adopta un espesor $t = 6$ cm

$$g_1 = 144 \text{ kg / m}^2$$

Aislación, impermeabilización;

$$g_2 = 56 \text{ kg / m}^2$$

$$\underline{g = 200 \text{ kg / m}^2}$$

Esfuerzos:

Punto 0: $N_x = N_y = 200 \times 52 / 2 = 5.200 \text{ kg / m}$

Punto A: $N_y = 200 \times 52 = 10.400 \text{ kg / m}$

Punto B: $N_x = 200 \times 52 = 10.400 \text{ kg / m}$

Punto C: $T_{\text{máx}} = 2 \cdot q \cdot R = 2 \times 200 \times 52 = 20.800 \text{ kg/m}$

Tensión máxima en el hormigón

$$\sigma_{b \text{ adm}} = 80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_b = \frac{10.400}{6 \times 100} = 17,33 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{b \text{ adm}}$$

Punto C: $T_{\text{máx}} = 2 \cdot q \cdot R = 2 \times 200 \times 52 = 20.800 \text{ kg/m}$

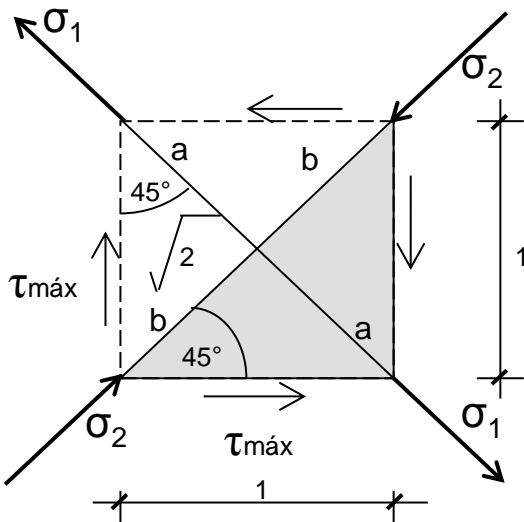
en la esquina C se requiere un aumento del espesor de la lámina. Allí deberá terminar con un espesor de 15 cm.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{20.800}{15 \times 100} = 13,87 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{\text{adm}}$$

Allí se tiene estado de corte puro ($N_x = N_y = 0$) y en consecuencia, las tensiones principales serán:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 13,87 \text{ kg/cm}^2$$

En efecto, proyectando sobre las direcciones a y b los esfuerzos tangenciales, tendremos las tensiones en esa direcciones, que a su vez son direcciones principales:



Proyección según a-a

$$\sigma_1 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \tau_{\text{máx}} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sigma_1 = \tau_{\text{máx}}$$

Proyección según b-b

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\text{máx}}$$

Fuerza de tracción que produce σ_1

Armadura de tracción en las esquinas

$$T = \sigma_1 \times t \times 100 \text{ cm} =$$

$$= 13,87, \text{kg/cm}^2 \times 15 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 20.800 \text{ kg}$$

$$\text{Fe2 (cm}^2) = \frac{T}{\sigma_{e \text{ adm}}}$$

El esfuerzo en el tensor resulta

$$Z = 1/3 \cdot q \cdot R \cdot L$$

$$Z = 1/3 \times 200 \times 52 \times 40 = 138.667 \text{ kg}$$

BÓVEDAS DE TRASLACIÓN PARABÓLICAS (paraboloide elíptico)

Conocidos L_1 y L_2 , y adoptado los valores de f_1 y f_2 , se calculan los radios R_1 y R_2 :

$$R_1 = \frac{(L_1)^2}{8 \cdot (f_1)} \qquad R_2 = \frac{(L_2)^2}{8 \cdot (f_2)}$$

La superficie responde a la ecuación:

$$Z = 4 \cdot \left[\frac{(f_1) \cdot X^2}{(L_1)^2} + \frac{(f_2) \cdot Y^2}{(L_2)^2} \right]$$

Resolvemos el mismo ejemplo numérico

$L_1 = L_2 = 40 \text{ m}$ Se adopta: $f_1 = f_2 = 4 \text{ m}$ con $q = 200 \text{ kg/m}^2$

Calculamos los radios: $R_1 = R_2 = \frac{(40)^2}{8 \times 4} = 50 \text{ m}$

Punto 0: $N_x = N_y = 200 \times 50 / 2 = 5.000 \text{ kg / m}$

Punto A: $N_y = 200 \times 50 = 10.000 \text{ kg / m}$ $N_x = T = 0$

Punto B: $N_x = 200 \times 50 = 10.000 \text{ kg / m}$ $N_y = T = 0$

Punto C: $T_{\text{máx}} = 2 \cdot q \cdot R = 2 \times 200 \times 50 = 20.000 \text{ kg/m}$

Como puede apreciarse, los esfuerzos resultan apenas inferiores a los obtenidos para la bóveda circular.

Esta concordancia se hace más ajustada a medida que el peralte disminuye, en tanto que si el peralte aumenta, también lo hacen las diferencias.

Para relaciones flechas/ luz $\leq 1/10$, se puede calcular el paraboloide elíptico como si fuese circular.

ESTABILIDAD DE LAS BÓVEDAS DE TRASLACIÓN

La carga crítica de pandeo para estas superficies de doble curvatura positiva, se puede determinar mediante la expresión:

$$q_{\text{crít}} = C \cdot E \cdot \frac{t^2}{R_1 \cdot R_2}$$

E = módulo de elasticidad

t = espesor

$R_1; R_2$ = radios de curvatura

C = valor teórico para el hormigón igual a 1,2. Los estudios aconsejan valores conservadores menores, pero siempre por encima de 0,4

Para plantas rectangulares de cualquier relación de lados y relación de flechas variables de 1 a 0,2, se dan valores en la Tabla N° 1, para calcular los esfuerzos internos en puntos de una malla de lado 1/8 de la respectiva luz, con las siguientes fórmulas:

$$N_x = - \frac{q \times a^2}{h_x} \times K \times n_x$$

$$N_y = - \frac{q \times b^2}{h_y} \times \frac{1}{K} \times n_y$$

$$T_{xy} = - \frac{q \times a \times b}{\sqrt{h_x \times h_y}} \times t$$

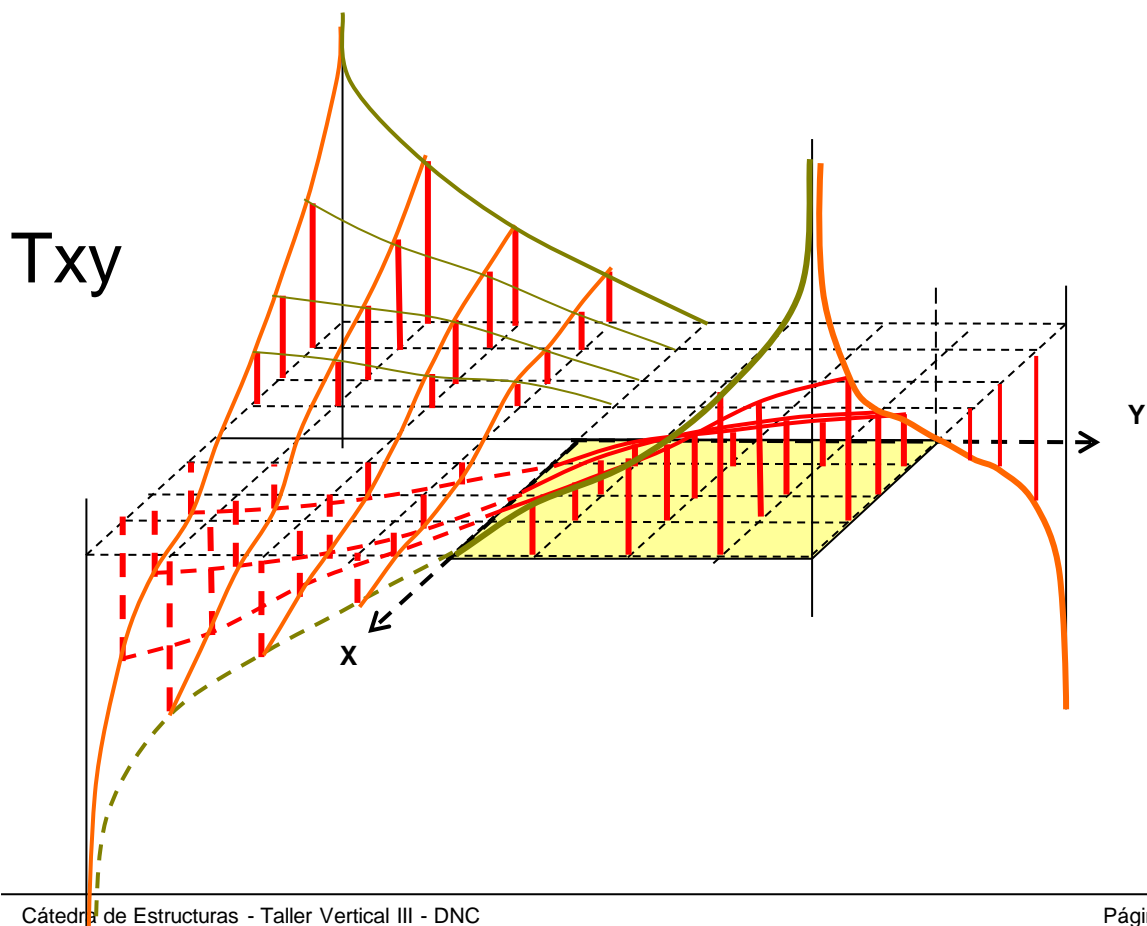
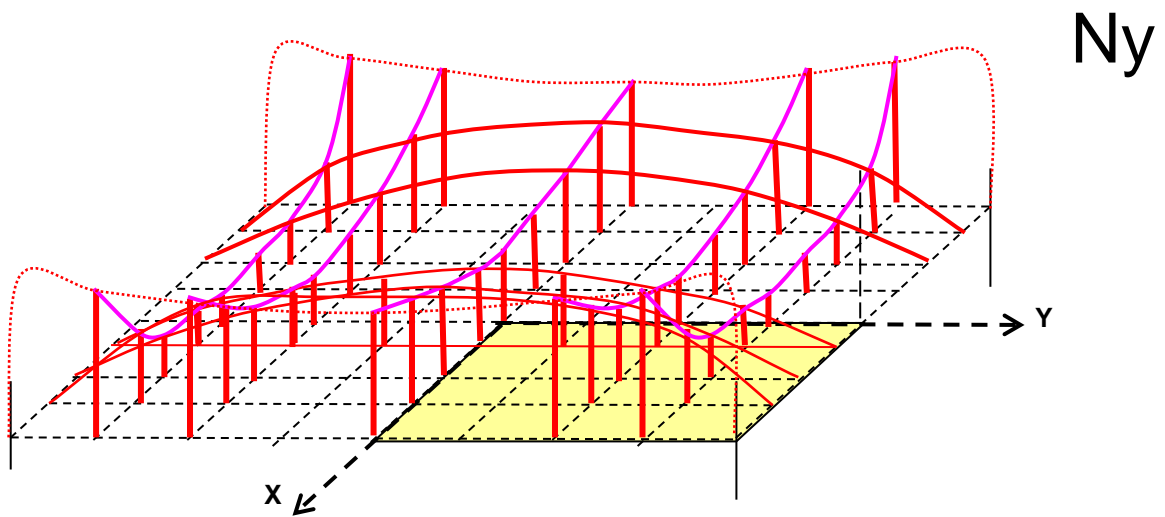
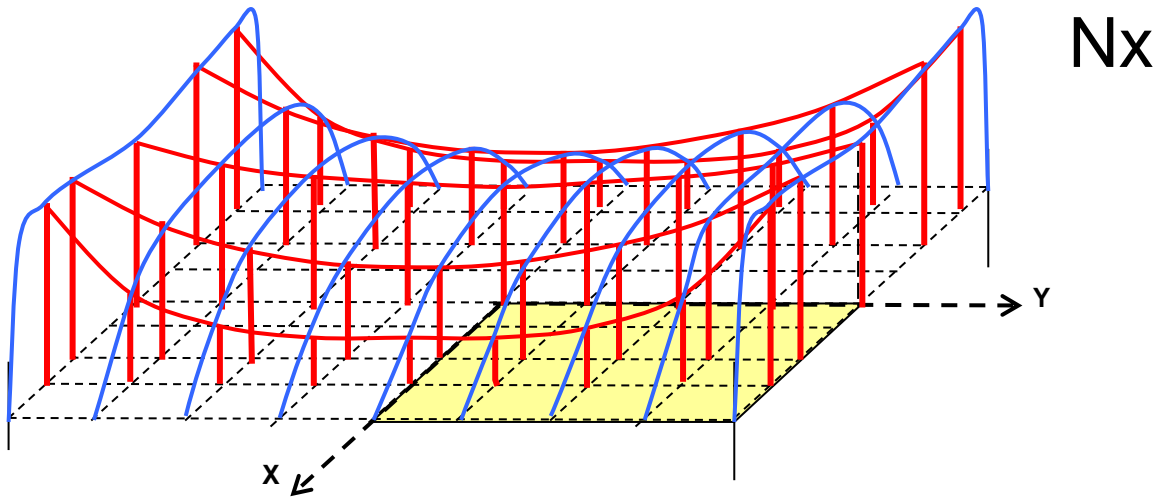
$$K = \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{2h_x}{a} \frac{x}{a} \right]^2}{1 + \left[\frac{2h_y}{b} \frac{y}{b} \right]^2}}$$

N_x : esfuerzo en la dirección de x (en kg/m)
 N_y : esfuerzo en la dirección de y (en kg/m)
 $T_{xy} = T_{yx}$ = esfuerzos tangenciales (en kg/m)
x e y coordenadas. Varían $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$
a; b semi-longitud de la planta del paraboloide
 h_x ; h_y flechas de las parábolas respectivas

Tabla N° 1 - Valores de n_x , n_y y t para calcular N_x , N_y y T_{xy} respectivamente

| | $f_1/f_2 = 1$ | | | $f_1/f_2 = 0,8$ | | | $f_1/f_2 = 0,6$ | | | $f_1/f_2 = 0,4$ | | | $f_1/f_2 = 0,2$ | | |
|----|---------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-----------------|-------|-------|
| | n_x | n_y | t | n_x | n_y | t | n_x | n_y | t | n_x | n_y | t | n_x | n_y | t |
| 0 | 0,250 | 0,250 | 0 | 0,211 | 0,289 | 0 | 0,164 | 0,336 | 0 | 0,105 | 0,395 | 0 | 0,038 | 0,462 | 0 |
| 1 | 0,267 | 0,233 | 0 | 0,230 | 0,270 | 0 | 0,184 | 0,316 | 0 | 0,126 | 0,374 | 0 | 0,054 | 0,446 | 0 |
| 2 | 0,318 | 0,182 | 0 | 0,287 | 0,213 | 0 | 0,248 | 0,252 | 0 | 0,193 | 0,307 | 0 | 0,112 | 0,388 | 0 |
| 3 | 0,399 | 0,101 | 0 | 0,381 | 0,119 | 0 | 0,357 | 0,143 | 0 | 0,320 | 0,180 | 0 | 0,252 | 0,248 | 0 |
| 4 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 |
| 5 | 0,233 | 0,267 | 0 | 0,196 | 0,304 | 0 | 0,152 | 0,348 | 0 | 0,097 | 0,403 | 0 | 0,035 | 0,465 | 0 |
| 6 | 0,250 | 0,250 | 0 | 0,215 | 0,285 | 0,034 | 0,171 | 0,329 | 0,031 | 0,117 | 0,383 | 0,026 | 0,049 | 0,451 | 0,014 |
| 7 | 0,301 | 0,199 | 0,068 | 0,272 | 0,228 | 0,069 | 0,233 | 0,267 | 0,067 | 0,181 | 0,319 | 0,060 | 0,104 | 0,396 | 0,040 |
| 8 | 0,389 | 0,111 | 0,096 | 0,370 | 0,130 | 0,100 | 0,345 | 0,155 | 0,103 | 0,308 | 0,192 | 0,101 | 0,239 | 0,261 | 0,088 |
| 9 | 0,500 | 0 | 0,108 | 0,500 | 0 | 0,114 | 0,500 | 0 | 0,120 | 0,500 | 0 | 0,125 | 0,500 | 0 | 0,128 |
| 10 | 0,182 | 0,318 | 0 | 0,153 | 0,347 | 0 | 0,117 | 0,383 | 0 | 0,075 | 0,425 | 0 | 0,027 | 0,473 | 0 |
| 11 | 0,199 | 0,301 | 0,068 | 0,169 | 0,331 | 0,065 | 0,133 | 0,367 | 0,060 | 0,090 | 0,410 | 0,049 | 0,038 | 0,462 | 0,027 |
| 12 | 0,250 | 0,250 | 0,140 | 0,223 | 0,277 | 0,139 | 0,188 | 0,312 | 0,132 | 0,143 | 0,357 | 0,115 | 0,086 | 0,414 | 0,074 |
| 13 | 0,350 | 0,150 | 0,210 | 0,331 | 0,169 | 0,215 | 0,304 | 0,197 | 0,216 | 0,265 | 0,235 | 0,208 | 0,197 | 0,303 | 0,174 |
| 14 | 0,500 | 0 | 0,244 | 0,500 | 0 | 0,255 | 0,500 | 0 | 0,265 | 0,500 | 0 | 0,274 | 0,500 | 0 | 0,280 |
| 15 | 0,101 | 0,399 | 0 | 0,084 | 0,416 | 0 | 0,064 | 0,436 | 0 | 0,041 | 0,459 | 0 | 0,015 | 0,485 | 0 |
| 16 | 0,111 | 0,389 | 0,096 | 0,094 | 0,406 | 0,091 | 0,074 | 0,426 | 0,081 | 0,049 | 0,451 | 0,065 | 0,020 | 0,480 | 0,034 |
| 17 | 0,150 | 0,350 | 0,210 | 0,131 | 0,369 | 0,201 | 0,108 | 0,392 | 0,185 | 0,081 | 0,419 | 0,156 | 0,044 | 0,456 | 0,098 |
| 18 | 0,520 | 0,250 | 0,356 | 0,230 | 0,270 | 0,353 | 0,204 | 0,296 | 0,342 | 0,169 | 0,331 | 0,316 | 0,117 | 0,383 | 0,246 |
| 19 | 0,500 | 0 | 0,465 | 0,500 | 0 | 0,480 | 0,500 | 0 | 0,494 | 0,500 | 0 | 0,506 | 0,500 | 0 | 0,510 |
| 20 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 | 0 | 0,500 | 0 |
| 21 | 0 | 0,500 | 0,108 | 0 | 0,500 | 0,101 | 0 | 0,500 | 0,089 | 0 | 0,500 | 0,070 | 0 | 0,500 | 0,038 |
| 22 | 0 | 0,500 | 0,243 | 0 | 0,500 | 0,229 | 0 | 0,500 | 0,208 | 0 | 0,500 | 0,173 | 0 | 0,500 | 0,108 |
| 23 | 0 | 0,500 | 0,465 | 0 | 0,500 | 0,443 | 0 | 0,500 | 0,413 | 0 | 0,500 | 0,363 | 0 | 0,500 | 0,262 |
| 24 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Los diagramas de los esfuerzos son los siguientes:



En las figuras siguientes se observa el modelo matemático de paraboloide elptico, en su geometría antes de deformarse y después de deformado, para cargas verticales de peso propio:

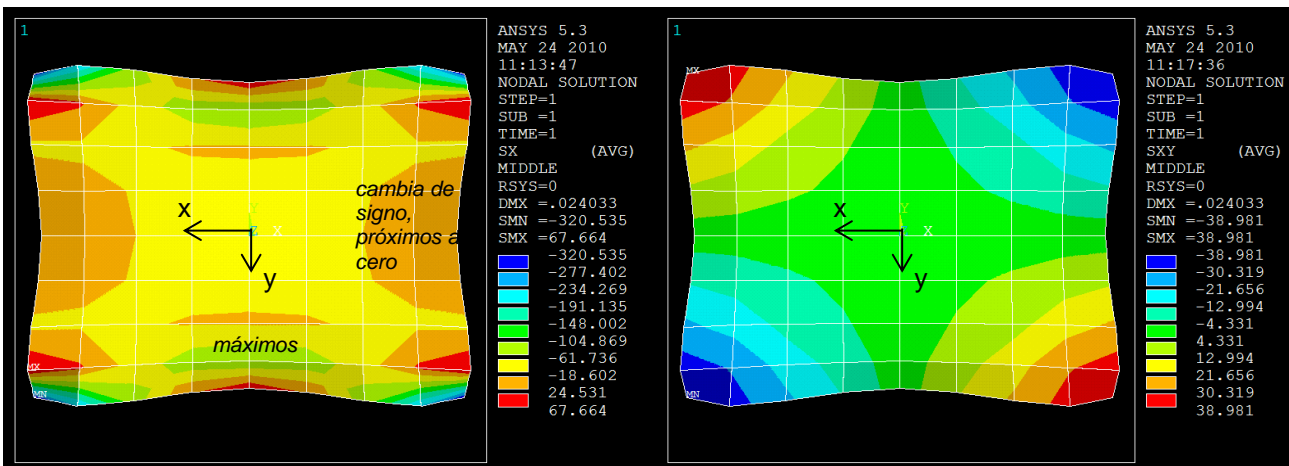
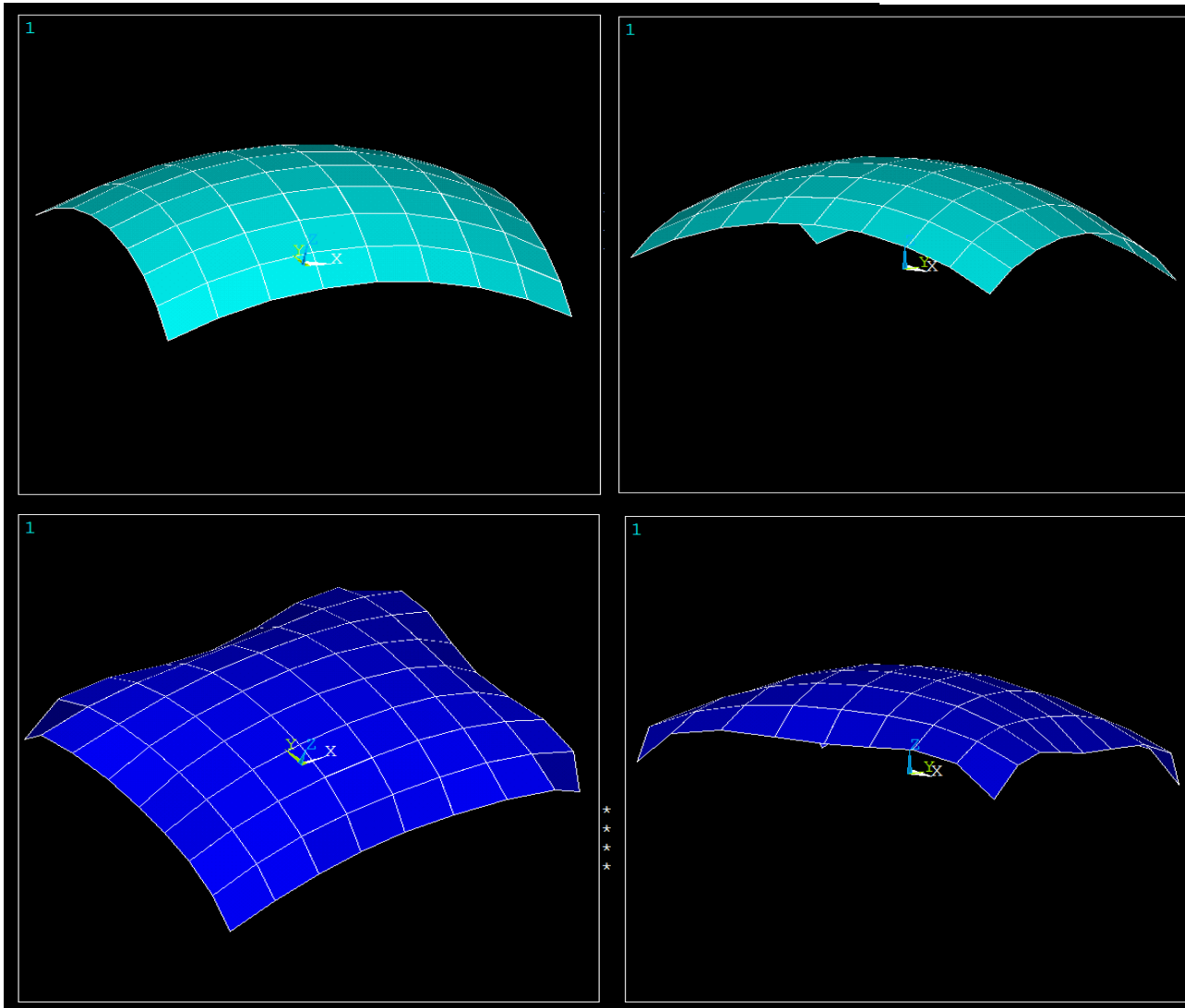


Diagrama de tensiones para N_x . Predomina la compresión (color amarillo) con algunas perturbaciones en los bordes, donde cambia de valores e inclusive de signo (tracción)

Diagrama de tensiones para T_{xy} . Se ve que hay dos diagonales (una de compresión y otra de tracción) y los valores máximos se ubican en las esquinas