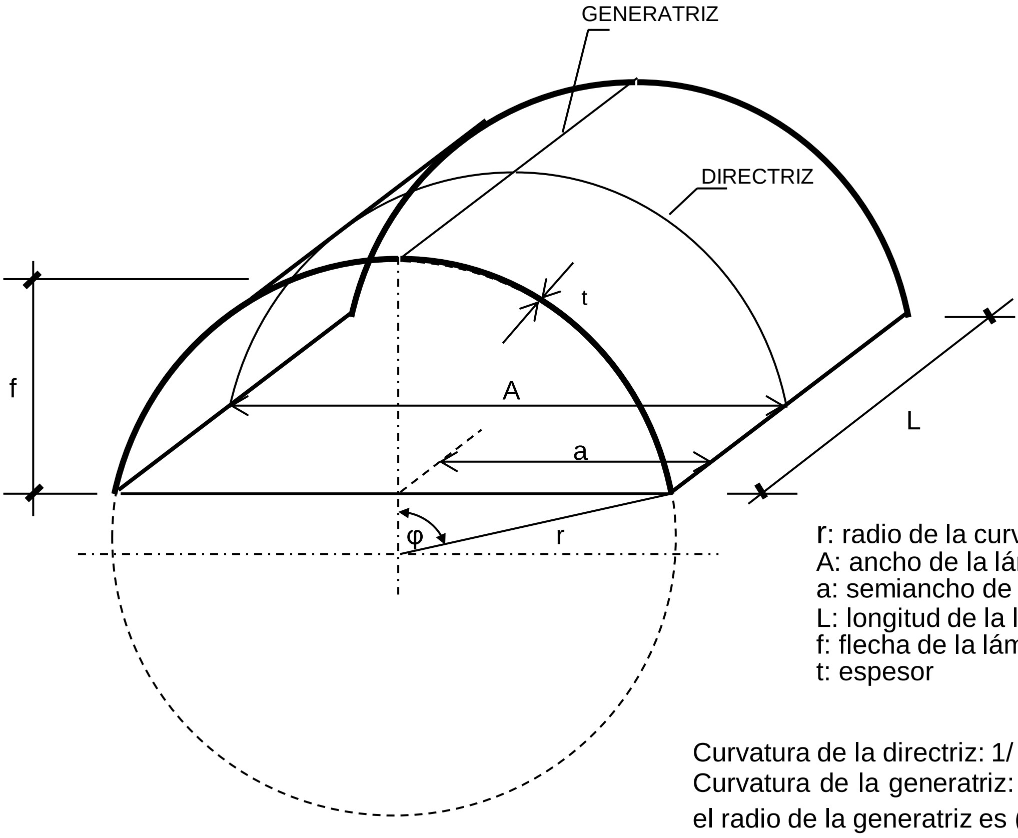
LÁMINAS CILÍNDRICAS

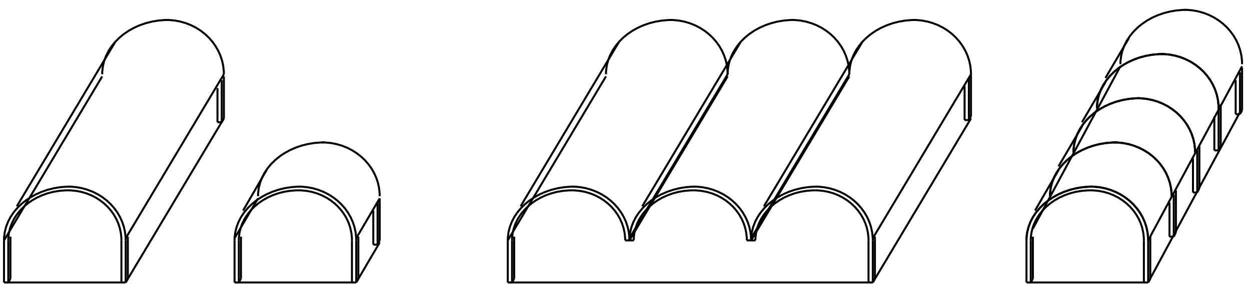
Estas superficies se obtienen haciendo deslizar una recta (generatriz) a lo largo de una curva circular vertical (directriz) normales entre sí.
De acuerdo a la relación entre el radio (r) y el largo (L), se clasifican en láminas cortas L / r < 2 y en láminas largas L / r > 2



r: radio de la curva circular
A: ancho de la lámina
a: semiancho de la lámina
L: longitud de la lámina
f: flecha de la lámina
t: espesor

Curvatura de la directriz: 1/ r
Curvatura de la generatriz: 0, porque el radio de la generatriz es (∞)
Lámina sinclástica

De acuerdo a su disposición pueden ser **simples**; **múltiples**, cuando se acoplan lateralmente; **continuas** o de "cañón corrido", cuando se acoplan longitudinalmente.

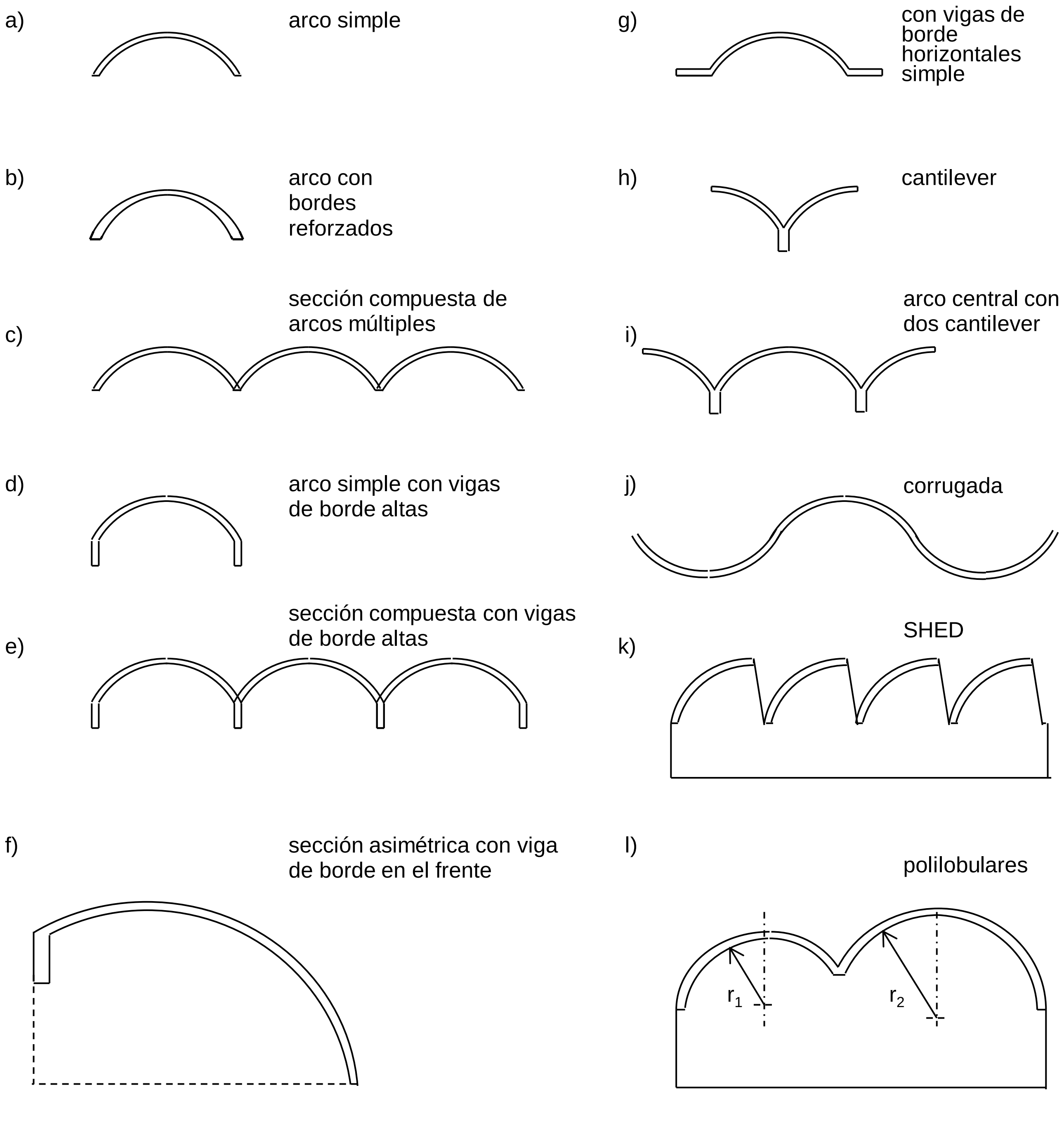


Largas Cortas

SIMPLES MÚLTIPLES CONTINUAS

Las láminas cilíndricas cortas son casi siempre continuas y nunca múltiples, en cambio las largas son comúnmente múltiples y continuas.
Teniendo en cuenta la sección transversal, las láminas pueden adoptar varias formas, por ejemplo:

a) un simple arco de círculo, de elipse u otra curva adecuada.
b) arco con bordes reforzados.
c) sección compuesta de arcos múltiples, donde se distinguen los extremos de los centrales.
d) arcos simples con vigas de borde altas.
e) sección compuesta de arcos múltiples con vigas de borde altas, tanto para bordes extremos como para interiores (aunque corrientemente no se construyen con las vigas interiores)
f) sección asimétrica, con vigas de borde en el frente.
g) con vigas horizontales.
h) cantilever.
j) corrugada.
k) tipo SHED, usualmente para fábricas.
l) polilobulares, formadas por dos arcos de círculo de distintos radios.



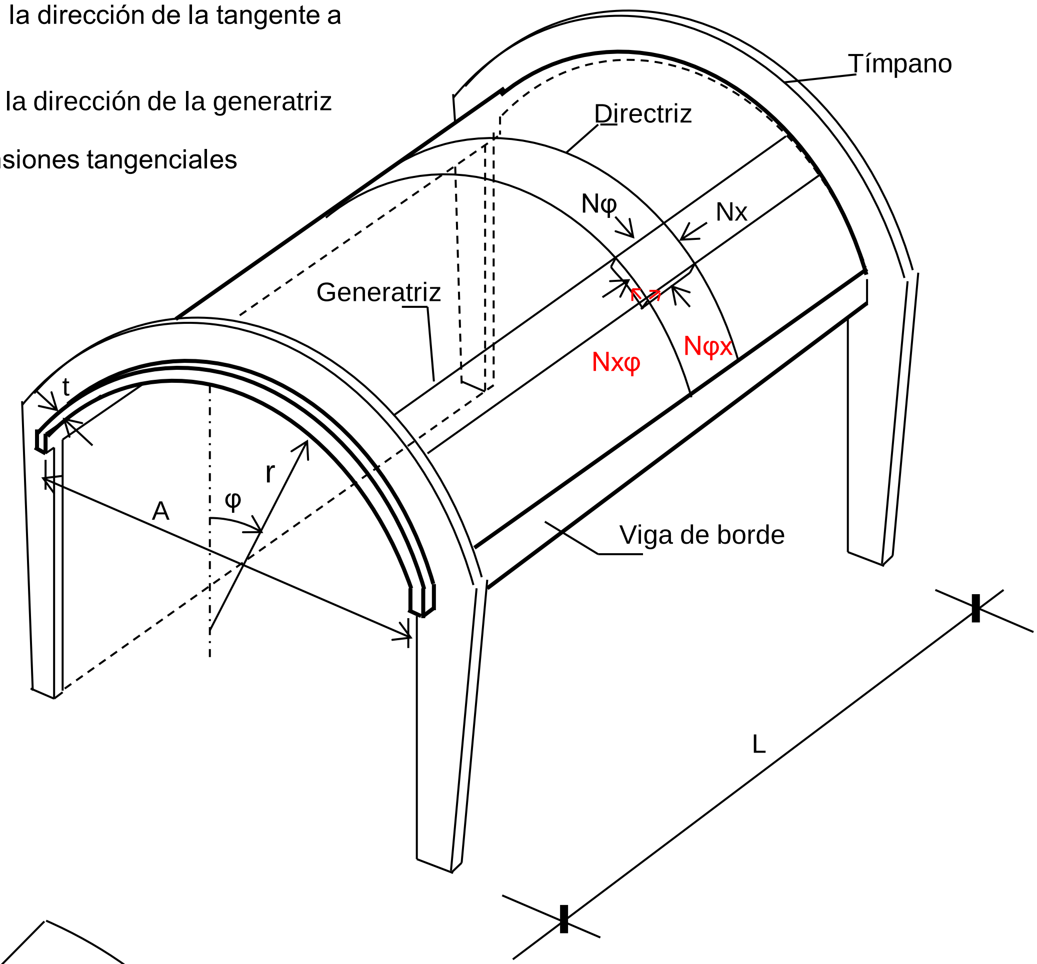
LÁMINAS CILÍNDRICAS LARGAS

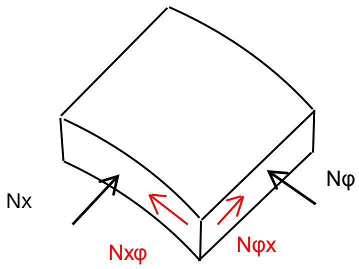
L / r > 2

Nφ tensión en la dirección de la tangente a la directriz

Nx tensión en la dirección de la generatriz

Nφx= Nxφ tensiones tangenciales





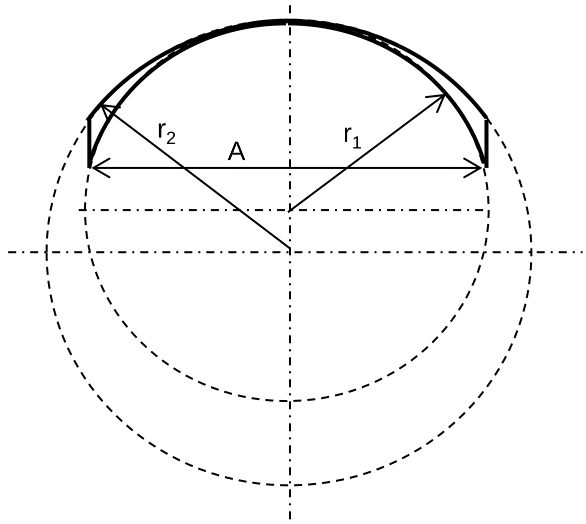
En las láminas cilíndricas largas, los esfuerzos predominantes son los Nx

En las láminas cilíndricas largas, deben descartarse por razones estáticas, las directrices parabólicas y catenaria, siendo las más recomendables la elíptica y la circular.

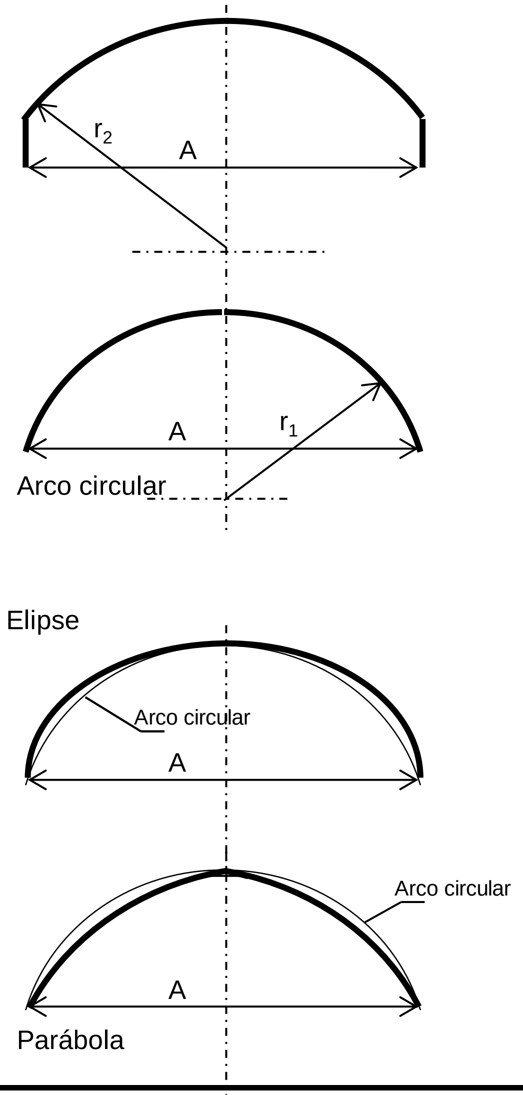
El comportamiento estructural de la lámina con curva directriz catenaria es completamente distinto al de la directriz circular. Al ser la catenaria la línea de presiones del peso propio, los arcos que conforman la lámina están exentos de flexión y sometidos solamente a esfuerzos de compresión. Es decir que cada arco que forma la lámina actuará en forma independiente uno del otro, sin ninguna trasmisión de esfuerzos entre ellos (esfuerzos tangenciales nulos). Se generan empujes actuando como arcos, y es necesario tomar los esfuerzos verticales y horizontales (con vigas de borde), entonces no funciona como lámina cilíndrica autoportante, sino como sucesión de arcos a los que hay que sustentar por medio de apoyos.

En las láminas cilíndricas de directriz parabólica, en los bordes el ángulo φ es menor a 90º, entonces el esfuerzo Nφ no se anula y es necesario tomarlo con un elemento de borde (siempre llevan vigas de borde).
Los esfuerzos tangenciales en estas láminas son positivos, produciendo sobre los tímpanos acciones de tracción es decir, los esfuerzos actuantes van de abajo hacia arriba. Así mismo, los esfuerzos Nx son de tracción en la zona superior de la lámina. Por estas razones, la directriz parabólica no es recomendable para proyectos de láminas cilíndricas autoportantes sometidas a peso propio.

DIRECTRICES



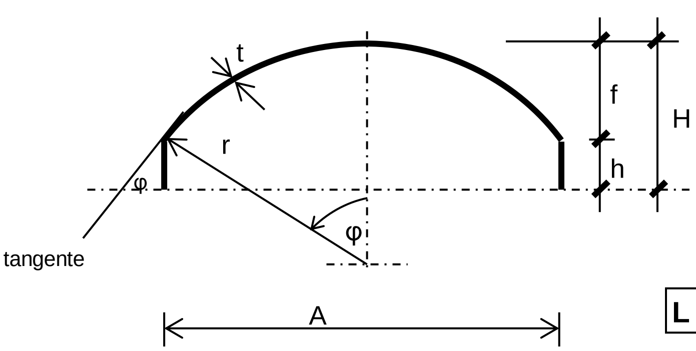
Arco circular con viga de borde



Se han dibujado directrices de distintas curvas. Las dos primeras son arco circular con curvaturas distintas al tener una de ellas viga de borde.
Al dibujar la elipse y la parábola se ha dejado como referencia la curva del arco circular.
Todas ellas cubren un ancho A

DIMENSIONES TÍPICAS PARA LÁMINA SIMPLE

Directriz: arco circular



Luz máx. en arco circular: 40 m; para luces mayores decide el pandeo, requiriéndose láminas nervuradas. Con vigas de borde pretensadas puede llegarse a 70 m.

	L	A	H	r	t
	(m)	(m)	(m)	(m)	(cm)
L / A > 2	36,58	15,24	3,96	12,19	7,5
	33,53	13,72	3,35	12,19	7,5
	30,48	12,19	3,20	10,67	7,0
	27,43	10,67	2,74	10,67	7,0
L / A = 2	30,48	15,24	3,20	10,67	7,5
	24,38	12,19	2,50	10,67	7,5
	18,29	9,14	1,83	9,14	6,5
	12,19	6,10	1,31	6,10	6,5

Las medidas originales están en pié. Si se divide por (0,3048 m), la tabla da en números enteros.

Peralte

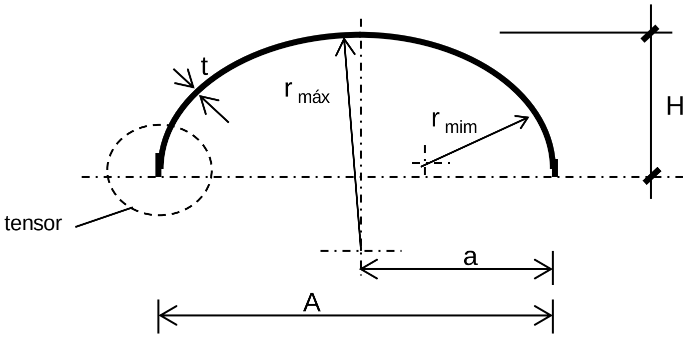
$H / L \geq 1/10$	$f / L \geq 1/20$	$f / A \geq 1/6$

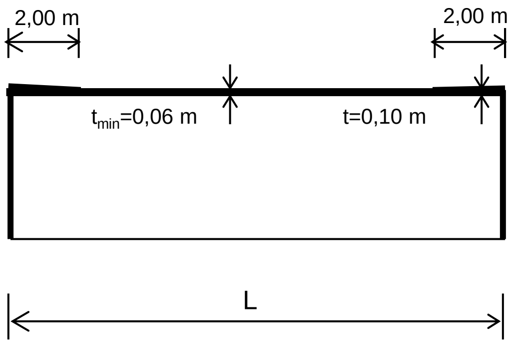
Radio de curvatura

$\frac{3}{5} . L \geq r \geq \frac{1}{6} . L$	$A \geq r \geq \frac{A}{2}$

DIMENSIONES TÍPICAS PARA LÁMINA SIMPLE

Directriz: elíptica





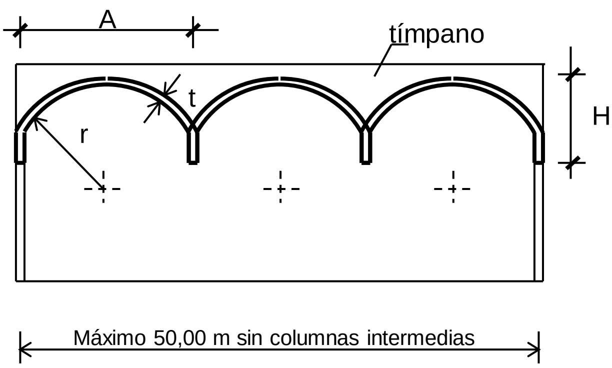
Peralte

H / L ≥ 1/10	H / A ≥ 1/5

Radio de curvatura

$r_{máx}$ en la clave	$r_{máx} = \frac{a^2}{H} \leq 20$ m
r_{mim} en el arranque	

DIMENSIONES TÍPICAS PARA LÁMINA MÚLTIPLE



	L	A	H	r	t
	(m)	(m)	(m)	(m)	(cm)
L / A > 2	54,86	15,24	5,49	12,19	7,5
	48,77	13,72	4,88	10,67	7,5
	42,67	12,19	4,27	10,67	7,0
	36,58	10,67	3,66	9,14	7,0
L / A = 2	30,48	15,24	3,05	10,67	7,0
L / A < 2	24,38	13,72	2,44	10,67	6,5
	18,29	10,67	1,83	9,14	6,5
	12,19	7,62	1,22	6,10	6,5

Las medidas originales están en pié. Si se divide por (0,3048 m), la tabla da en números enteros.

Peralte

H / L ≥ 1/10

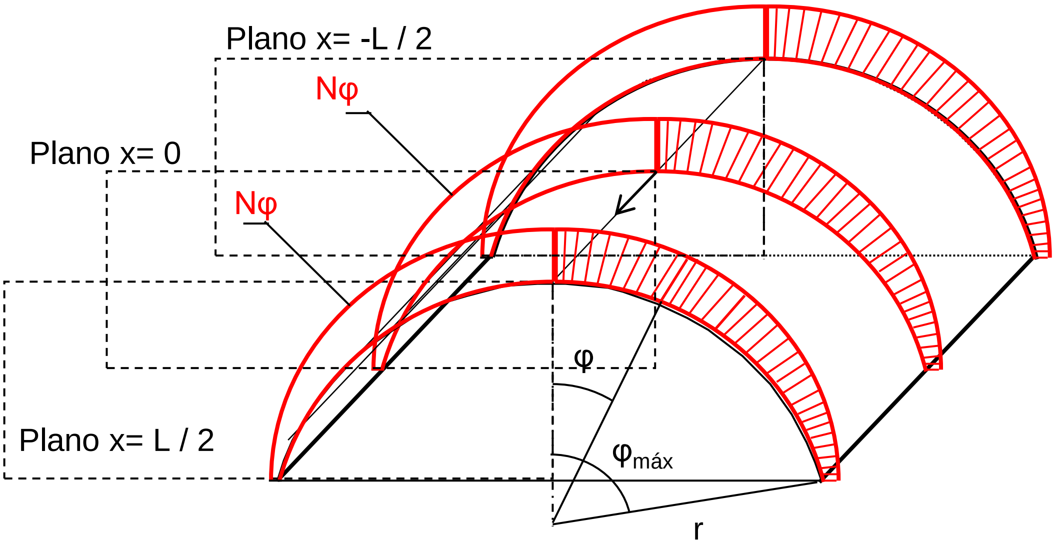
Radio de curvatura

$\frac{3}{5} . L \geq r \geq \frac{1}{6} . L$	$A \geq r \geq \frac{A}{2}$

ESFUERZOS MEMBRANALES EN LÁMINAS CILÍNDRICA

Esfuerzo anular

$$\boxed{N\varphi = -q \cdot r \cdot \cos\varphi} \qquad (\text{I})$$



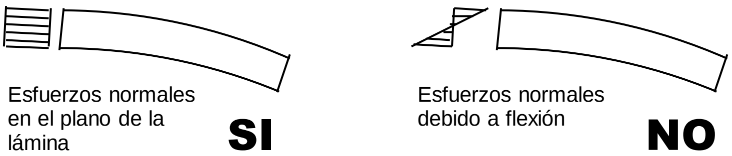
$N\varphi$ = esfuerzo en la dirección de la directriz. (Fuerza por unidad de longitud) $N\varphi$ en (kg/m)

q = carga sobre la lámina: peso propio g; sobrecarga p; la suma de ambas: q en (kg/m^2)

r = radio de la lámina en (m)

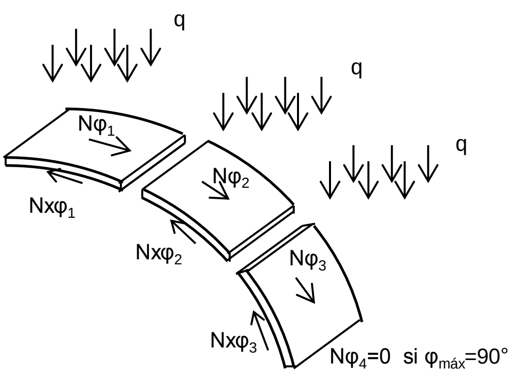
$\varphi_{máx}$ = ángulo máximo entre la vertical y el extremo de la lámina. Si φ = 90º, entonces $N\varphi$ = 0 (esfuerzo nulo en el borde)

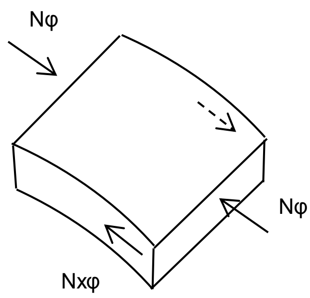
La teoría del estado membranal implica que la lámina puede resistir esfuerzos que actúan en el plano (de la lámina) como los esfuerzos normales o tangenciales, sin resistencia a la flexión.

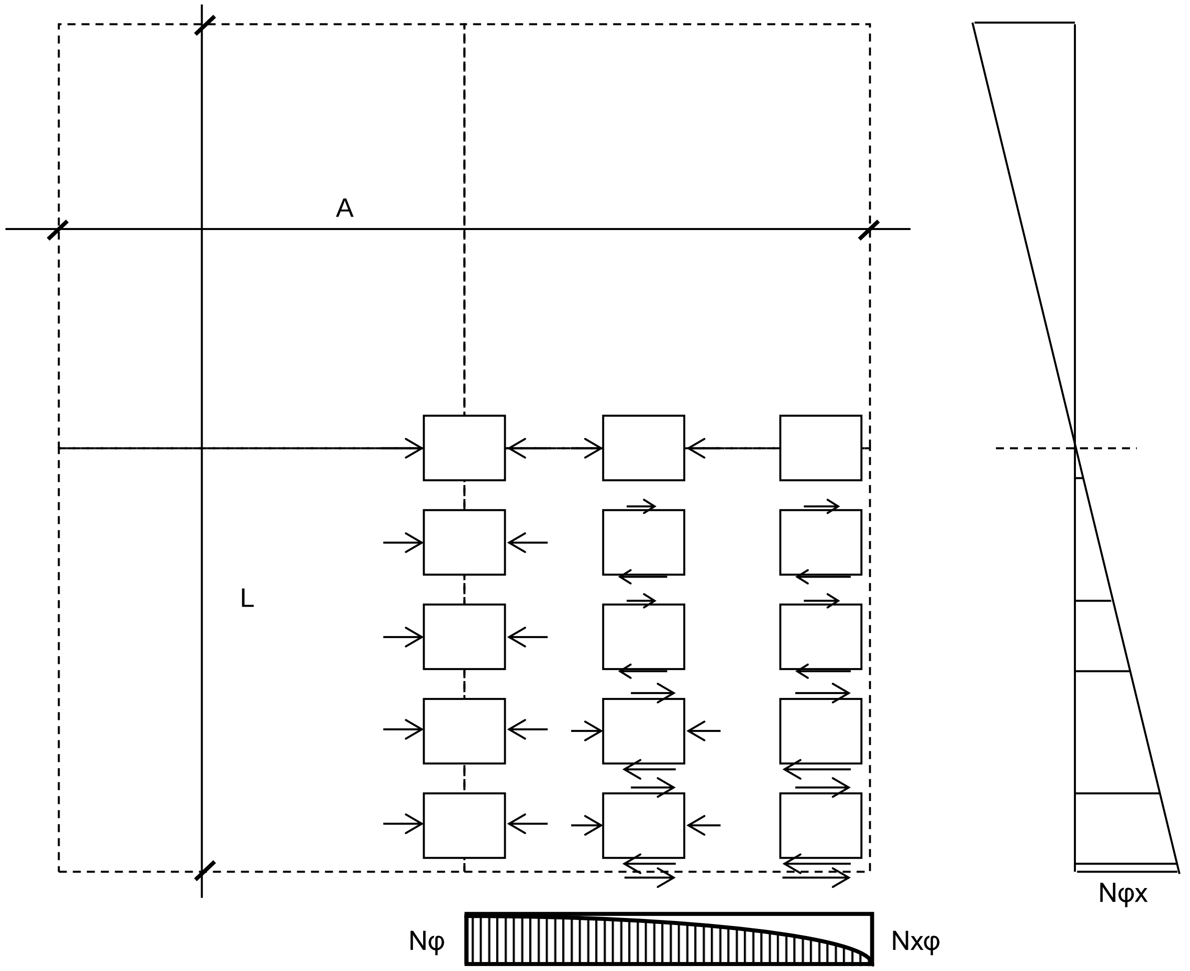


En el sentido transversal, la lámina cilíndrica se comporta con un efecto particular de arco, en que cada uno de ellos soporta por esfuerzos de compresión una parte de la carga exterior actuante, y para sostener el arco inmediato anterior, lo hace a través de esfuerzos tangenciales $Nx\varphi$. Este comportamiento es idéntico para todos los infinitos arcos que pueden considerarse dividida la lámina, hasta llegar al tímpano.

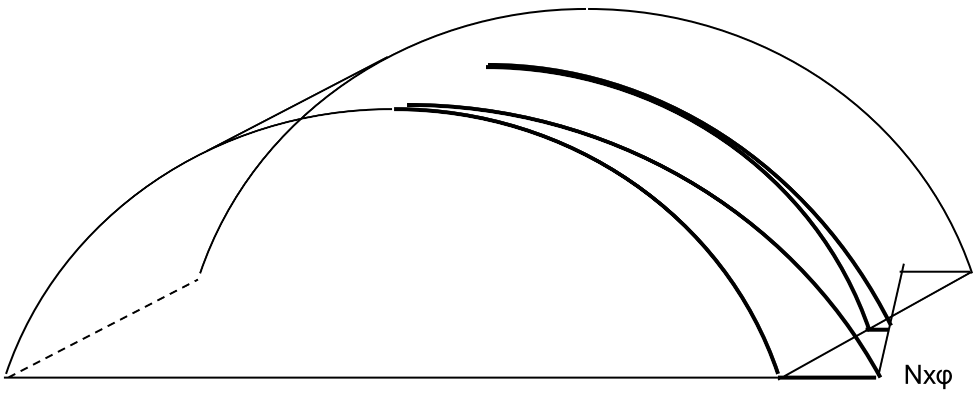
El sistema se mantiene en equilibrio entre las cargas externas q, los esfuerzos anulares $N\varphi$ que son máximos en la clave y tienden a anularse en los bordes, y los esfuerzos en los bordes curvos con los arcos contiguos $Nx\varphi$

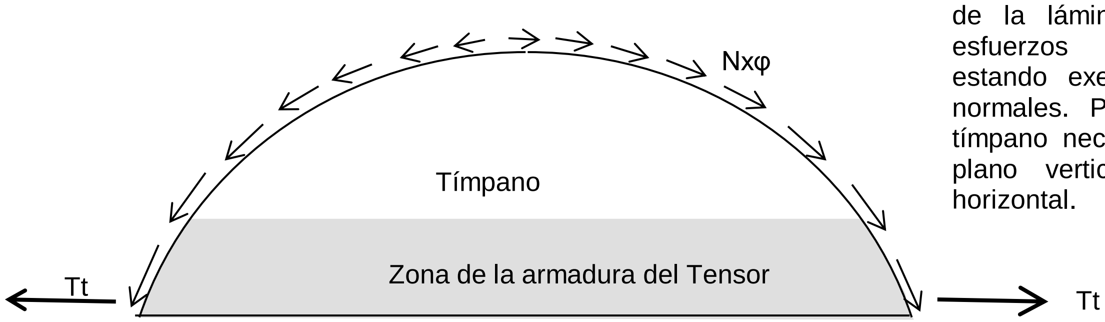






Se ha representado en planta, el estado de esfuerzos en la dirección de la directriz, Nφ, y los esfuerzos tangenciales Nxφ, como así sus respectivos diagramas.

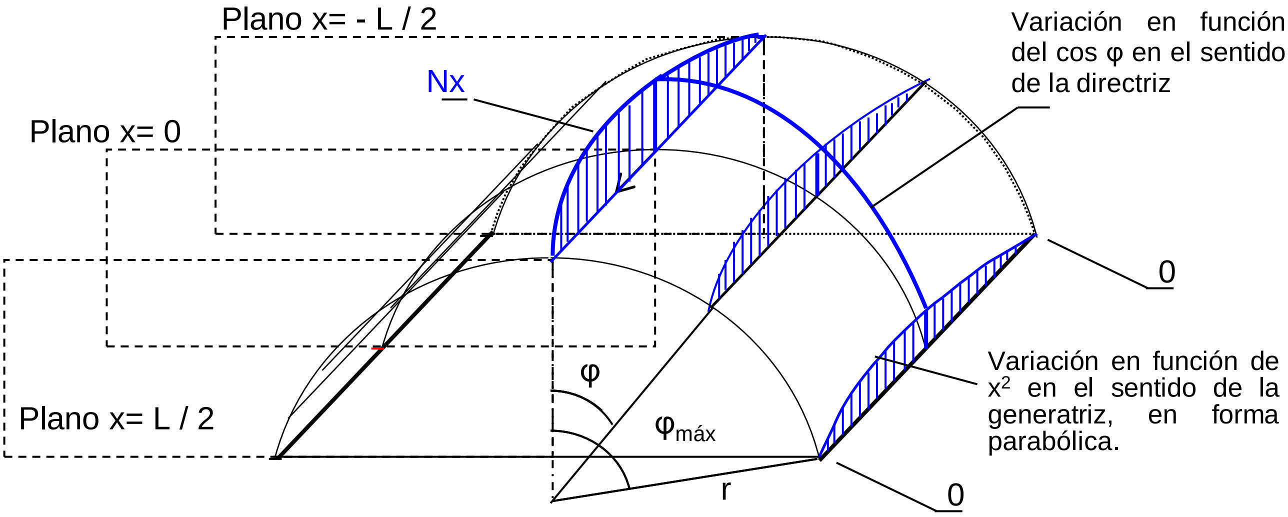




El tímpano recibe toda la carga de la lámina por medio de esfuerzos tangenciales, estando exento de esfuerzos normales. Por esta causa el tímpano necesita rigidez en el plano vertical y no en el horizontal.

Esfuerzo longitudinal

$$\boxed{N_x = \frac{-2q}{r}\left(\frac{L^2 - 4x^2}{8}\right)\cos\varphi = \frac{-q}{r}\left(\frac{L^2 - x^2}{4}\right)\cos\varphi} \quad (\mathrm{II})$$



N_x = esfuerzo normal longitudinal en la dirección de la generatriz. (Fuerza por unidad de longitud) Nφ en
q = carga sobre la lámina: peso propio g; sobrecarga p; la suma de ambas: q en (kg/m^2)

r = radio de la lámina en (m)

L = longitud de la lámina en (m)

x = longitud medida a partir del centro de la lámina hacia los tímpanos en (m)

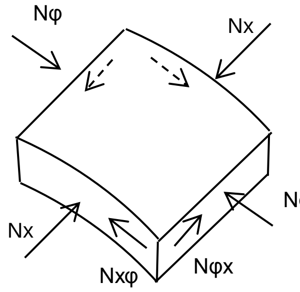
φ = ángulo a partir de la vertical.

$\varphi_{máx}$ = ángulo máximo entre la vertical y el extremo de la lámina.

Debe cumplirse: $\sigma'_b = N_x$ ó $N_\varphi / t \cdot 100\text{cm} < \sigma'_{b_{adm}}$ ($\sigma'_{b_{adm}}$ en función del Hº)

A causa de las tensiones Nxφ, que se originan para equilibrar el efecto del arco, en las caras normales aparecen esfuerzos tangenciales Nφx de igual magnitud (teorema de Cauchy).
Estos esfuerzos tangenciales originan una tracción creciendo desde los tímpanos hacia el centro donde se hacen máximos.
La fuerza de tracción puede ser absorbida por un tensor en el borde, engrosando la lámina en dicha zona.
El equilibrio estático de la lámina exige que el esfuerzo de tracción se equilibre con uno de compresión, siendo que una variación que compense en cada sección, al esfuerzo de tracción. De aquí se deduce que el esfuerzo de compresión será máximo en el centro de la lámina, disminuyendo en forma parabólica hasta anularse en los apoyos formados por los tímpanos.

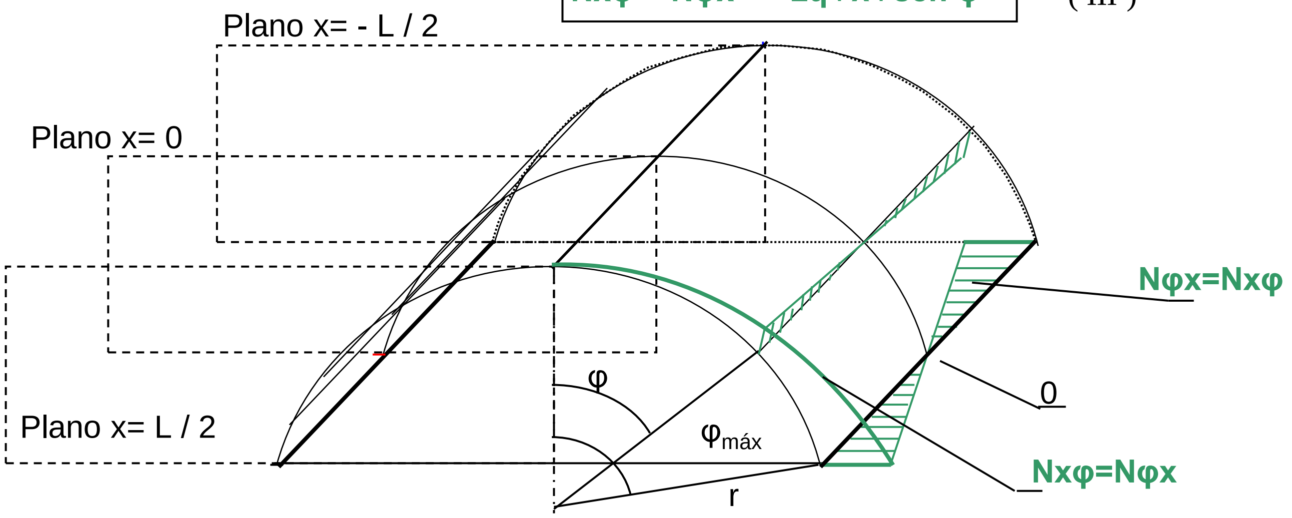
Así como la fórmula (I) varía solamente en función del cos φ, en la dirección de la generatriz, la fórmula (II) lo hace no sólo en función del cos φ en el sentido de la directriz, sino que también varía en función de x^2 en el sentido de la generatriz, en forma parabólica.
Los esfuerzos Nx son de compresión y se anulan al llegar al tímpano. No existen esfuerzos normales en el tímpano, entonces no debe existir rigidez en el tímpano para que efectivamente se cumpla esta hipótesis.



Elemento de la lámina de directriz circular con los esfuerzos membranales

Esfuerzos tangenciales

$$\boxed{N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = -\,2q\,.\,x\,.\,\text{sen}\,\varphi} \qquad \text{(III)}$$



Nxφ = Nφx = esfuerzo tangencial. (Fuerza por unidad de longitud) en (kg/m)
q = carga sobre la lámina: peso propio g; sobrecarga p; la suma de ambas: q en (kg/m^2)

x = longitud medida a partir del centro de la lámina hacia los tímpanos en (m)

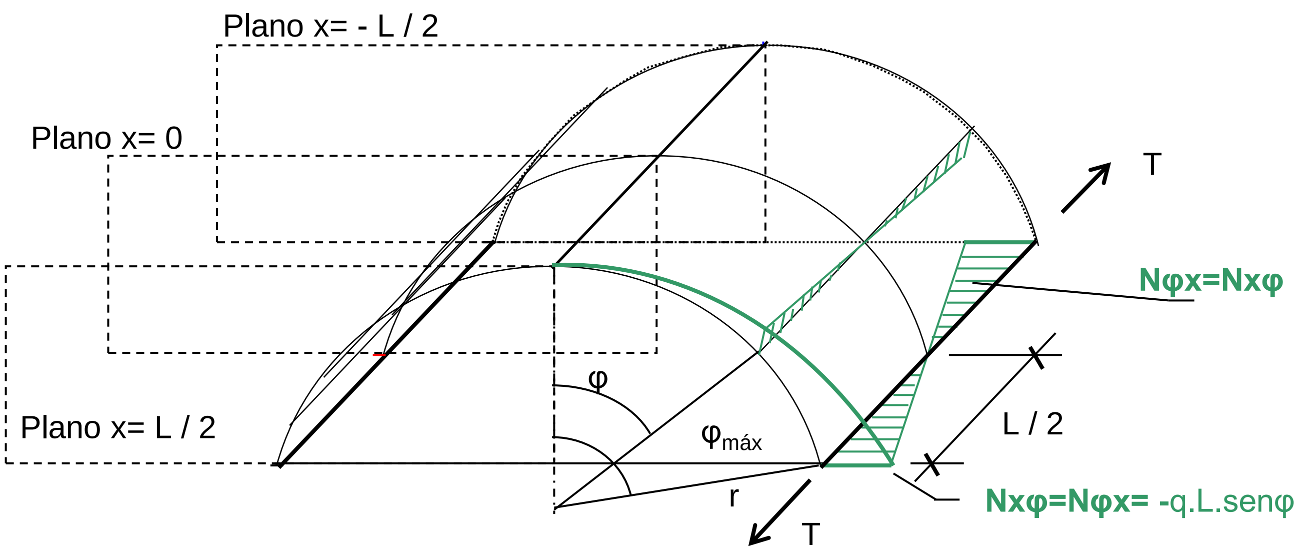
φ = ángulo a partir de la vertical.

$\varphi_{máx}$ = ángulo máximo entre la vertical y el extremo de la lámina.

Debe cumplirse: $\tau = N_{x\varphi} / t\,.\,100\text{cm} < \tau_{adm}$ (τ_{adm} en función del tipo de hormigón)

La fórmula (III) varía en función del sen φ en el sentido de la directriz y también varía en función de x en el sentido de la generatriz, en forma lineal.

Los esfuerzos tangenciales varían según la directriz, de un máximo en los bordes de la lámina, disminuyendo hasta anularse en la clave, y a su vez varían en forma lineal desde un valor cero en el centro de la lámina, hasta un máximo en los tímpanos (dirección de la generatriz).
Los esfuerzos tangenciales presentan entonces, en la dirección de la generatriz una variación lineal similar al de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.



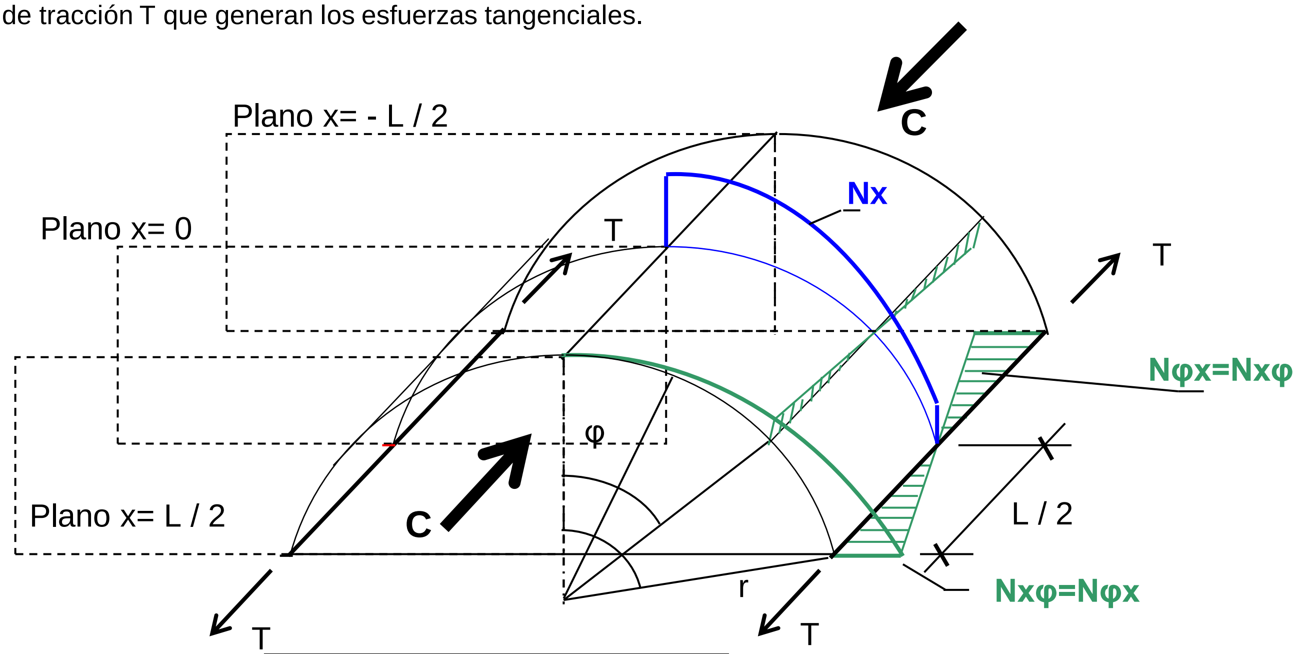
El esfuerzo de tracción en el borde es originado por las tensiones tangenciales, cuya fuerza equivale a la superficie del triángulo.

$$T = \frac{1}{2}\; N_{x\varphi} \;\; L/2$$

$$T = \frac{1}{2}\; q.\,L\,.\,L/2\;\text{sen}\varphi = \frac{1}{4}\;\; q.\,L^2\;\text{sen}\varphi$$

Fuerzas de compresión y de tracción

De todo lo expuesto, al considerar toda la lámina, vemos que está sometida a esfuerzos de compresión Nx desarrollados sobre la directriz que generan una fuerza de compresión C, que será equilibrada por las fuerzas de tracción T que generan los esfuerzas tangenciales.



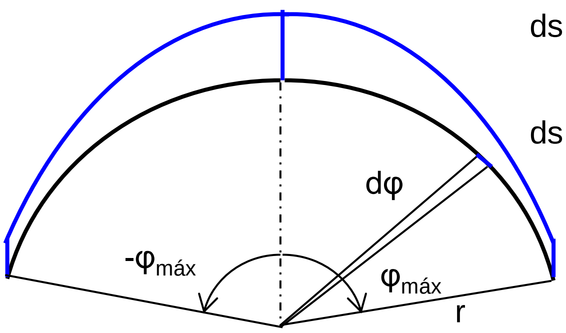
Por equilibrio: $C = 2 \cdot T$

La fuerza de compresión vale, en x =0:

$dC = \Sigma \; Nx \; ds$

$$C = \int_{\varphi_{máx}}^{-\varphi_{máx}} Nx \cdot r \cdot d\varphi$$

ds = r dφ



De la fórmula (II), en x =0:

$$Nx = \frac{-q}{r} \; \frac{L^2}{4} \; \cos\varphi$$

Reemplazando e integrando queda:

$$C = -q \, \frac{L^2}{4} \, \operatorname{sen}\varphi \Big|_{\varphi_{máx}}^{-\varphi_{máx}}$$

$$C = -q \, \frac{L^2}{4} \left(1 - (-1)\right)$$

$$\boxed{C = -q \, \frac{L^2}{2}}$$ Fuerza de compresión

Cuando φ= 90º = π/2, entonces:

$\operatorname{sen}\varphi_{máx} = \operatorname{sen}\pi/2 = 1$

$\operatorname{sen} -\varphi_{máx} = \operatorname{sen} -\pi/2 = -1$

Siendo T, para sen 90º = 1

$$T = \frac{1}{4} \; q \cdot L^2 \; \operatorname{sen}\varphi$$

$$\boxed{2 \cdot T = \frac{1}{2} \; q \cdot L^2}$$

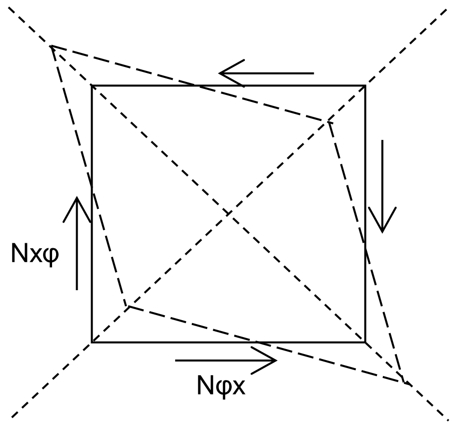
$$Fe_1 \; (cm^2) = \frac{T \; (kg)}{\sigma e_{adm} \; (kg/cm^2)}$$

En los casos de que φ ≠ 90º, hay que calcular el correcto valor de sen φ

$$\boxed{C = 2 \cdot T}$$

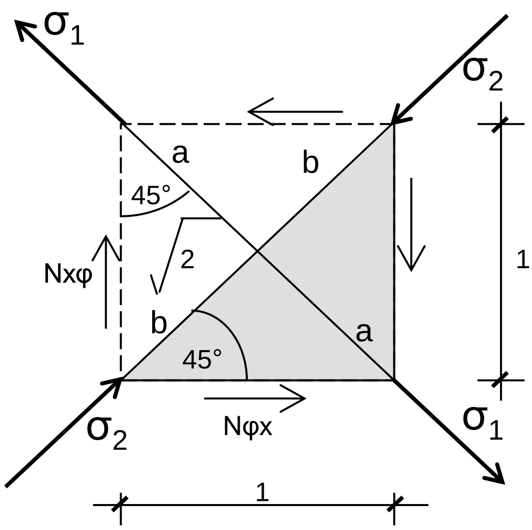
Tensiones principales de tracción en las esquinas

En las esquinas, puntos extremos de la lámina, existe un estado tangencial puro ($Nx = 0$; $N\varphi = 0$)
La existencia de este estado hace introducir deformaciones de tal tipo, que actuando sobre cualquier elemento diferencial de superficie, hace cambiar de forma, tendiendo a un rombo lo que en estado descargado es un cuadrado. Una diagonal se acorta (por compresión) y la otra diagonal se alarga (por tracción).



Este efecto, hace intuir que en la zona de las esquinas aparecen esfuerzos de tracción y compresión, llamados esfuerzos principales y son consecuencia del estado de esfuerzos tangenciales puro (estado de corte puro).
Todo estado de corte puro se puede concebir como combinación de dos elementos simples: tracción y compresión.

Proyectando sobre las direcciones a y b los esfuerzos tangenciales, tendremos las tensiones en esas direcciones, que a su vez son las direcciones principales.



Proyección según a-a

$$\sigma_1 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot N x\varphi \cdot 1 \cdot \cos 45° = \sqrt{2} \quad N x\varphi$$

$$\sigma_1 = N x\varphi_{\text{máx}}$$

Proyección según b-b

$$\sigma_1 = - \sigma 2 = N\varphi x_{\text{máx}}$$

Si bien las tensiones de compresión son tomadas por el hormigón, es necesario que éstas no sean grandes para tener seguridad, por posibles efectos de pandeo.
Con respecto a las tensiones de tracción, no debería superar valores admisibles para no producir fisuración en el hormigón. Para tomar estas fuerzas se coloca armadura de tracción a 45º en la dirección de las tensiones de tracción.

La fuerza será $\sigma_1 = N x\varphi$ x unidad de superficie:

$$F = N x\varphi_{\text{máx}} \text{ (kg)}$$

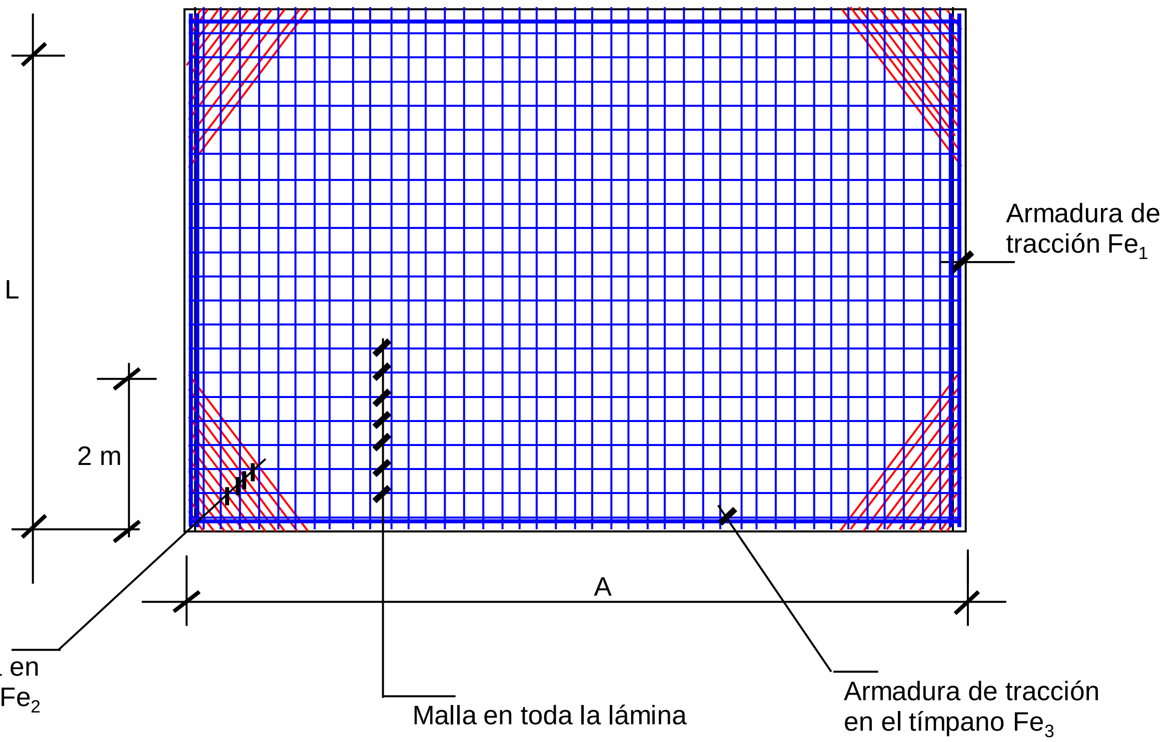
$$Fe_2 \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{F \text{ (kg)}}{\sigma e_{adm} \text{ (kg/cm}^2\text{)}}$$

σe_{adm}= tensión admisible del hierro

Se aconseja tomar hasta 2 m desde los tímpanos hacia el centro como zona a cubrir con la armadura a 45º. Esta armadura se coloca en cada esquina de la lámina. A partir de ahí, las pequeñas tracciones que se originen las tomará el hormigón.

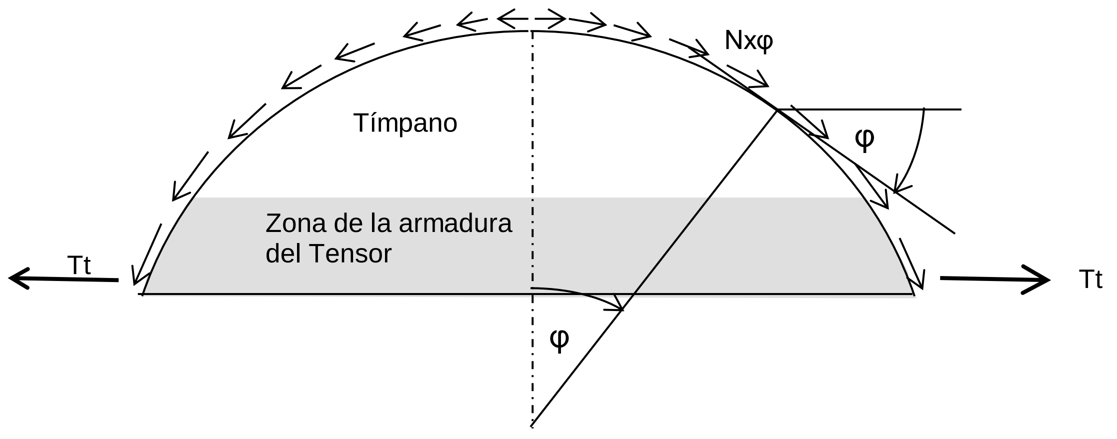
Armaduras

PLANTA



Armaduras en el tensor del tímpano

$$\boxed{N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = - q \cdot L \cdot \operatorname{sen} \varphi}$$



La proyección según el eje horizontal será: $Tt = \Sigma\, N_{x\varphi} \cdot \cos \varphi = - \int_{\varphi_{máx}}^{0} q \cdot L \cdot \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \; ds$

$$ds = r\, d\varphi$$

$$Tt = -\frac{1}{2}\, q \cdot L \cdot r \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi \Big|_{\pi/2}^{0}$$

Cuando $\varphi = 90º = \pi/2$, entonces:

$$\operatorname{sen} \varphi_{máx} = \operatorname{sen} \pi/2 = 1$$

$$Tt = -\frac{1}{2}\, q \cdot L \cdot r$$

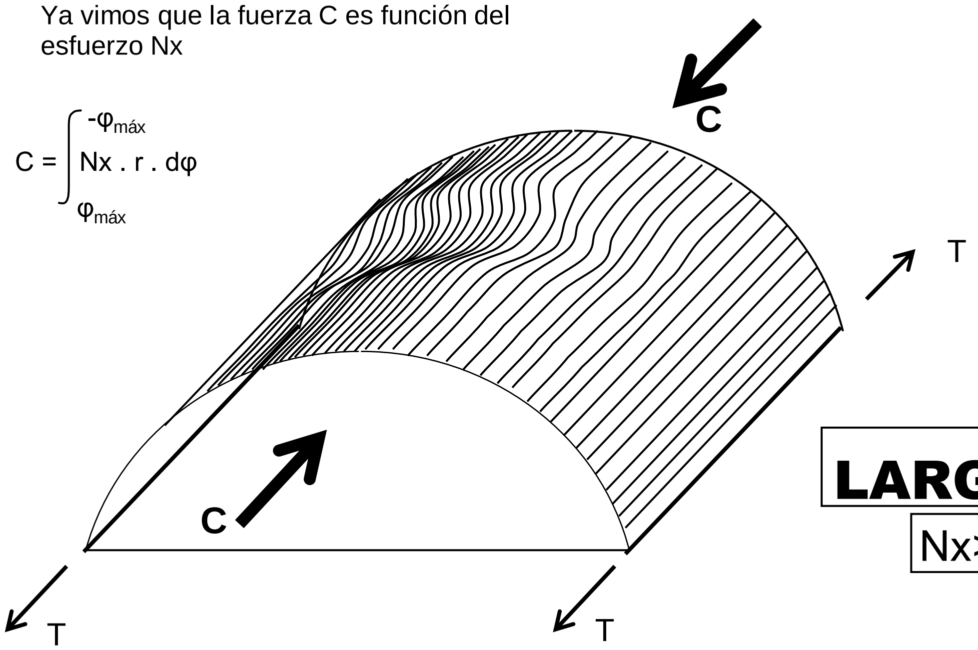
$$Fe_3\ (cm^2) = \frac{Tt\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ \ (kg/cm^2)}$$

Pandeo en láminas cilíndricas

En las láminas cilíndricas, al estar sometidas a compresión, se debe verificar la estabilidad frente al efecto de pandeo.
La pérdida de estabilidad puede ser ocasionada por la acción del esfuerzo Nx que se produce a lo largo de la generatriz o por el esfuerzo anular Nφ, desarrollado en la dirección de la directriz.

Ya vimos que la fuerza C es función del esfuerzo Nx

$$C = \int_{\varphi_{máx}}^{-\varphi_{máx}} Nx \, . \, r \, . \, d\varphi$$



LARGAS

Nx>Nφ

Cuando la lámina es de tipo larga, el pandeo debe verificar por efecto del esfuerzo Nx, y está dado por la expresión:

$$\sigma'b_{admP} = 0{,}2 \times Eb \times \frac{t}{r}$$

Eb = módulo de elasticidad del hormigón

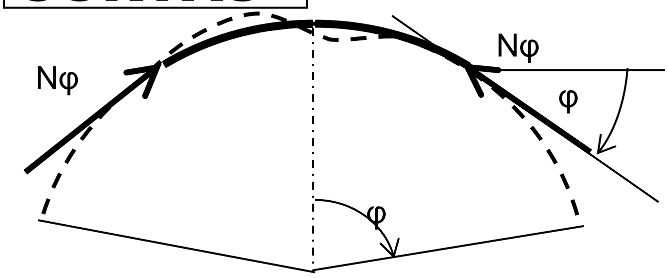
t = espesor de la lámina

r = radio de la curvatura

Cuanto menor es el radio de curvatura, mayor es la estabilidad de la lámina.

CORTAS

Nφ>Nx



Cuando la lámina es de tipo corta el pandeo debe verificar por efecto del esfuerzo Nφ (que es mayor que Nx), y está dado por la expresión:

$$\sigma'b_{admP} = \frac{1{,}1 \times Eb \times}{\gamma} \frac{t}{L} \sqrt{\frac{t}{r}}$$

Eb = módulo de elasticidad del hormigón

t = espesor de la lámina

L = longitud de la lámina

γ = coeficiente de seguridad entre 4 y 5

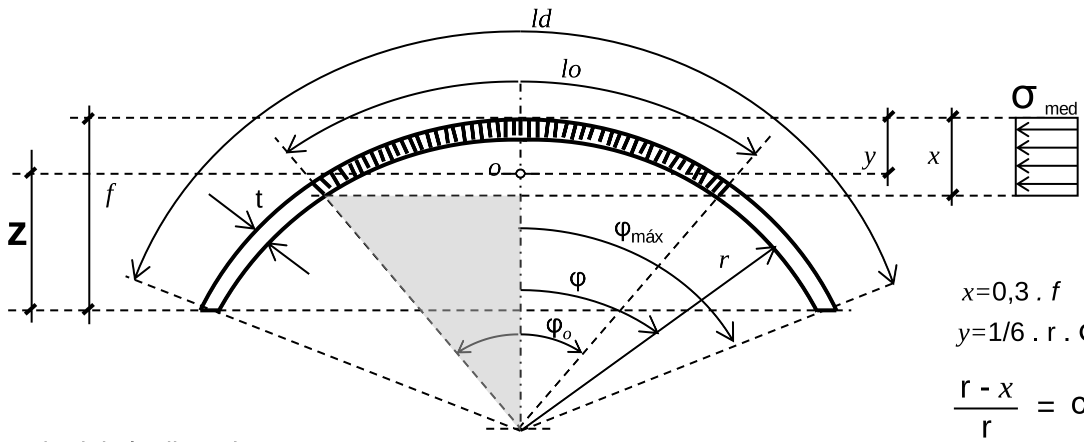
Tomaremos $\gamma = 4{,}5$

CÁLCULO APROXIMADO PARA LÁMINAS CILÍNDRICA

Su comportamiento puede asimilarse al de una viga simplemente apoyada, bajo el estado de una carga uniforme. Esto hace que pueda plantearse un método práctico para hallar las tensiones normales y tangenciales, en base a la teoría de la flexión simple.
Este método es práctico especialmente en los casos donde la tangente a la directriz en el borde, forme un ángulo $\varphi < 90°$ (si no hay perturbaciones de borde).

Se establecen ciertas hipótesis de cálculo:

1) Para las tensiones normales se acepta una ley de distribución media. (σ_{med})
2) La resistencia del hormigón no colabora a la tracción.
3) La sección permanece plana antes y después de la deformación.



$x = 0,3 \cdot f$

$y = 1/6 \cdot r \cdot \varphi o$

$$\frac{r - x}{r} = \cos \varphi o/2$$

φo (en radianes)

ld= longitud de la directriz

$ld = r \cdot 2\varphi_{máx}$ siendo $\varphi_{máx}$ en radianes

lo= longitud del arco de la directriz en que actúan las tensiones de compresión $lo = r \cdot \varphi o$

o= posición del centro de gravedad del arco comprimido

Se designa con **C**, al esfuerzo de compresión que actúa en la parte superior del eje neutro de la sección, correspondiente a la lámina (zona rayada) y con **Z** la fuerza de tracción actuante solamente en la armadura.
Para simplificar el cálculo, en vez de tomar el diagrama de tensiones normales en forma triangular (variación lineal según y) tomaremos una distribución de tensiones constantes, con valor σ_{med}, con valores entre 30 y 40 kg/cm2, a efectos de no superar la tensión máxima del hormigón, que se produce en la clave.

Se debe cumplir : **C = Z** $\quad$ **C =** $lo \cdot t \cdot \sigma_{med}$

Estas fuerzas producen un momento interno que debe equilibrar al momento flector que producen las cargas externas que actúan en la lámina.

Momento interno: $C \cdot \mathbf{z} = Z \cdot \mathbf{z}$ siendo $\mathbf{z}$ = brazo elástico = f - y

Momento flector (cargas externas): $M_f = q.L^2 / 8$ si sólo consideramos peso propio entonces q = g

El peso propio de una rebanada de lámina de 1 m de ancho vale:

$g = ld \cdot t \cdot 1\ m \cdot Pe$ $\quad$ Pe = peso específico del hormigón: 2.400 kg/m^3

La armadura total necesaria para tomar el M_f, será:

$$Fe = \frac{M_f}{\mathbf{z} \cdot \sigma e_{adm}}$$

σe_{adm} = tensión admisible del acero = 2.400 kg/cm^2