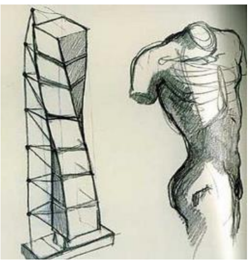


EJERCICIO RESUELTO (LÁMINA CORTA)

CONSIGNA: Superficie a cubrir 20,00 m x 18,00 m

RESOLUCIÓN: Consideramos "a priori" un espesor de 6,5 cm

Hormigón: $g_1 = 0{,}065 \text{ m} \times 2{,}4 \text{ t/m}^3 = 0{,}156 \text{ t/m}^2$

Aislaciones térmica e hidráulica: $g_2 = 0{,}044 \text{ t/m}^2$

Peso propio: $\mathbf{g = 0{,}20 \text{ t/m}^2}$

MATERIALES

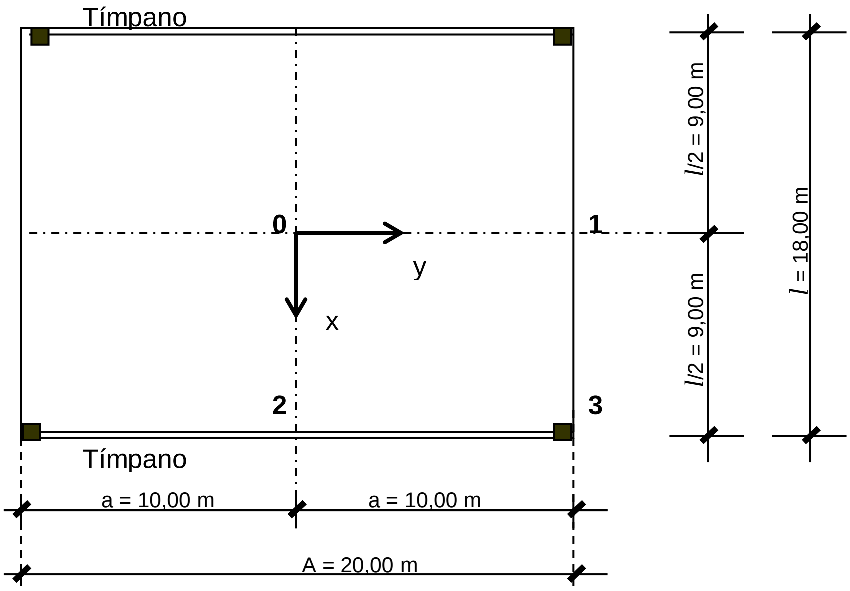
H21 = $\sigma'b = 210 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma'b_{adm} = 80 \text{ kg/cm}^2$

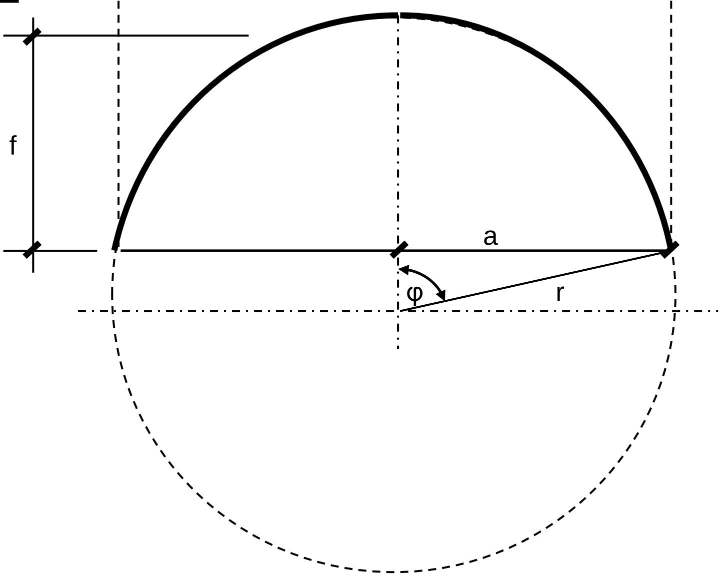
$Eb = 300.000 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma e_{adm} = 2.400 \text{ kg/cm}^2$

PLANTA



CORTE



$\varphi = 75º$

$\text{sen } \varphi = \text{sen } 75º = 0{,}966 = a / r$

$r = 10{,}00 \text{ m} / 0{,}966 = 10{,}35 \text{ m}$

$r - f = \sqrt{r^2 - a^2}$

$r - f = \sqrt{10{,}35^2 - 10{,}00^2} = 2{,}67 \text{ m}$

$f = 10{,}35 \text{ m} - 2{,}67 = 7{,}68 \text{ m}$

así tenemos las medidas:

a = 10,00 m A = 20,00 m

f = 7,68 m L = 18,00 m

r = 10,35 m φ = 75º

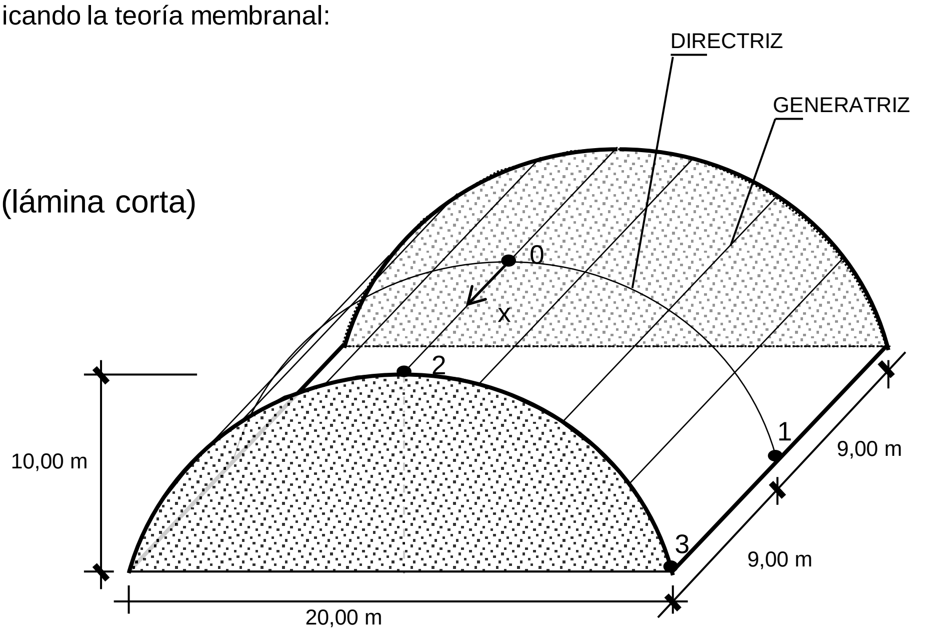
La relación: espesor / radio, debe mantenerse entre los siguientes valores:

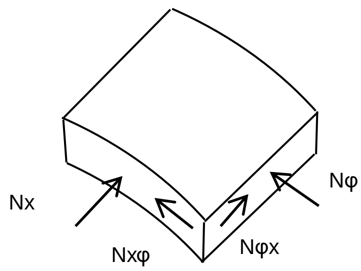
$$\frac{1}{250} \leq \frac{t}{r} \leq \frac{1}{100} \qquad 0{,}004 \leq \frac{t}{r} \leq 0{,}01 \qquad \frac{t = 0{,}065\ m}{r = 10{,}35\ m} = 0{,}0063 \quad \text{VERIFICA}$$

Calculamos los esfuerzos aplicando la teoría membranal:

En nuestro caso:

$$\frac{L = 18{,}00\ m}{r = 10{,}35\ m} = 1{,}7 < 2 \ \text{(lámina corta)}$$





Nφ : Esfuerzo en la dirección de la directriz

Nx : Esfuerzo en la dirección de la generatriz

$$N\varphi = -q \cdot r \cdot \cos\varphi$$

$$Nx = \frac{-2q}{r}\left[\frac{L^2 - 4x^2}{8}\right]\cos\varphi = \frac{-q}{r}\left[\frac{L^2}{4} - x^2\right]\cos\varphi$$

$$Nx\varphi = N\varphi x = -2q \cdot x \cdot \text{sen}\ \varphi$$

Para el punto 0: φ = 0º x = 0

Peso propio: g = 0,20 t/m^2

En este ejemplo, no consideramos sobrecargas (p=0), entonces g = q

$$N\varphi = -0{,}20\ t/m^2 \ . \ 10{,}35\ m = -2{,}07\ t/m$$

$$Nx = \frac{-2 \times 0{,}20\ t/m^2}{10{,}35\ m}\left[\frac{18{,}00^2}{8}\right] = -1{,}57\ t/m$$

$$Nx\varphi = N\varphi x = 0$$

$\boxed{\text{Para el punto 1:} \quad \varphi = 75^{o} \qquad x = 0}$

$N\varphi = -0{,}20\ t/m^2\ .\ 10{,}35\ m\ .\ 0{,}259 = -0{,}54\ t/m$ cos 75º = 0,259

$$Nx = \frac{-\,2 \times 0{,}20\ t/m^2}{10{,}35\ m}\left[\frac{18{,}00^2}{8}\right]\ .\ 0{,}259 = -0{,}41\ t/m$$

$Nx\varphi = N\varphi x = 0$

$\boxed{\text{Para el punto 2:} \quad \varphi = 0^{o} \qquad x = L / 2 = 9{,}00\ m}$

$N\varphi = -0{,}20\ t/m^2\ .\ 10{,}35\ m = -2{,}07\ t/m$

$$Nx = \frac{-\,2 \times 0{,}20\ t/m^2}{10{,}35\ m}\left[\frac{18{,}00^2 - 4 \times 9{,}00^2}{8}\right] = 0$$

$Nx\varphi = N\varphi x = 0$

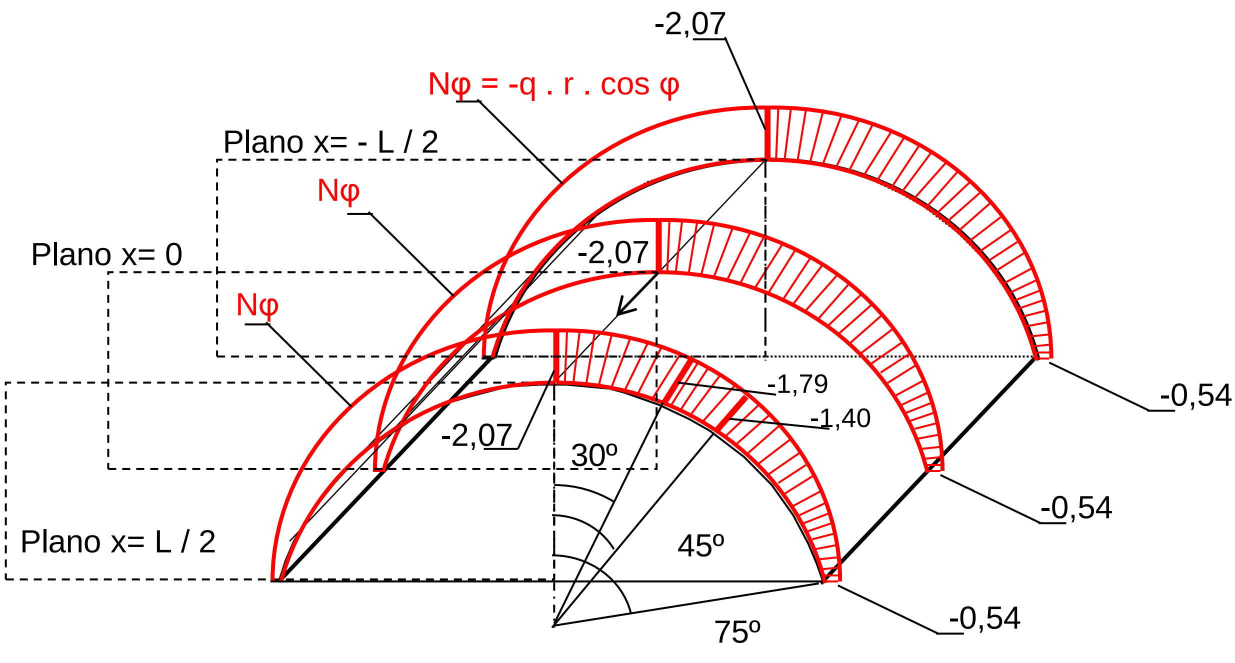
$\boxed{\text{Para el punto 1:} \quad \varphi = 75^{o} \qquad x = L / 2 = 9{,}00\ m}$

$N\varphi = -0{,}20\ t/m^2\ .\ 10{,}35\ m\ .\ 0{,}259 = -0{,}54\ t/m$ sen 75º = 0,966

$$Nx = \frac{-\,2 \times 0{,}20\ t/m^2}{10{,}35\ m}\left[\frac{18{,}00^2 - 4 \times 9{,}00^2}{8}\right]\ .\ 0{,}259 = 0$$

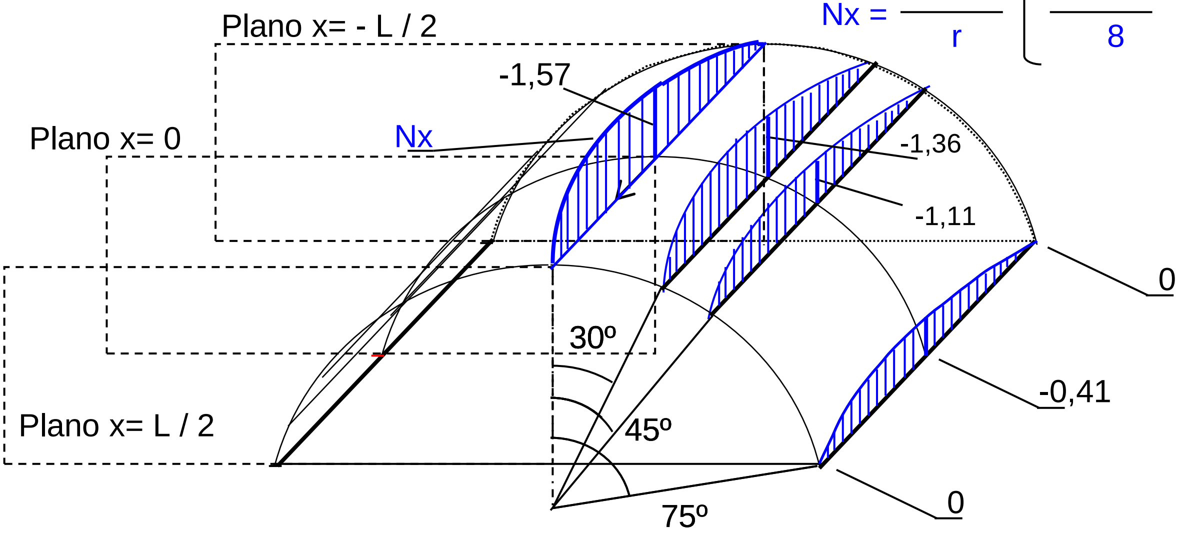
$Nx\varphi = N\varphi x = -2 \times 0{,}20\ t/m^2 \times 9{,}00\ m \times 0{,}966 = -3{,}48\ t/m$

DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nφ



DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nx

$$Nx = \frac{-2q}{r}\left[\frac{L^2 - 4x^2}{8}\right]\cos\varphi$$



DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nxφ = N φx

$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = -2q \, . \, x \, . \, \text{sen}\,\varphi$

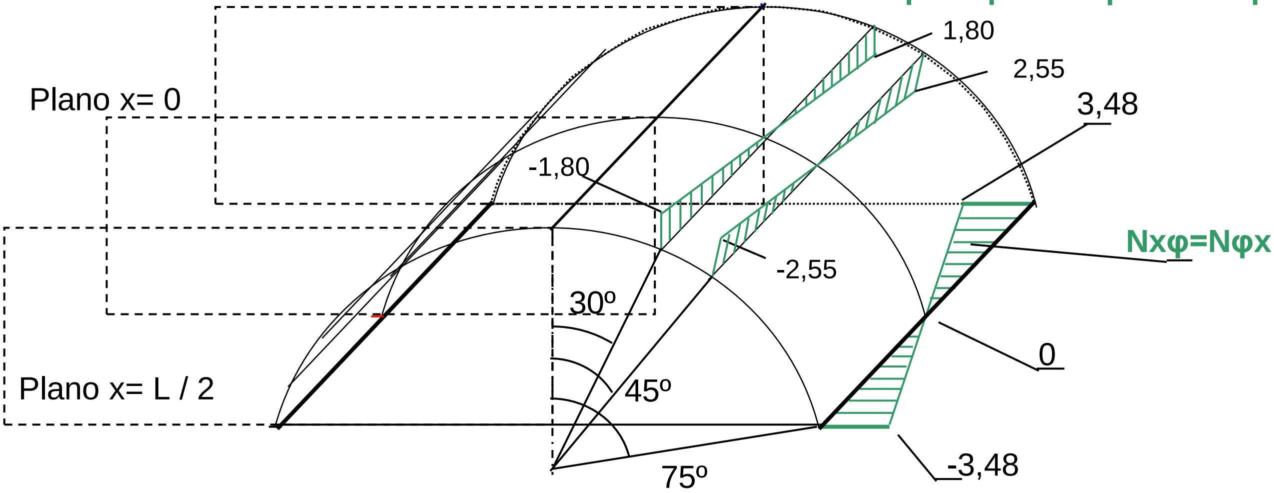
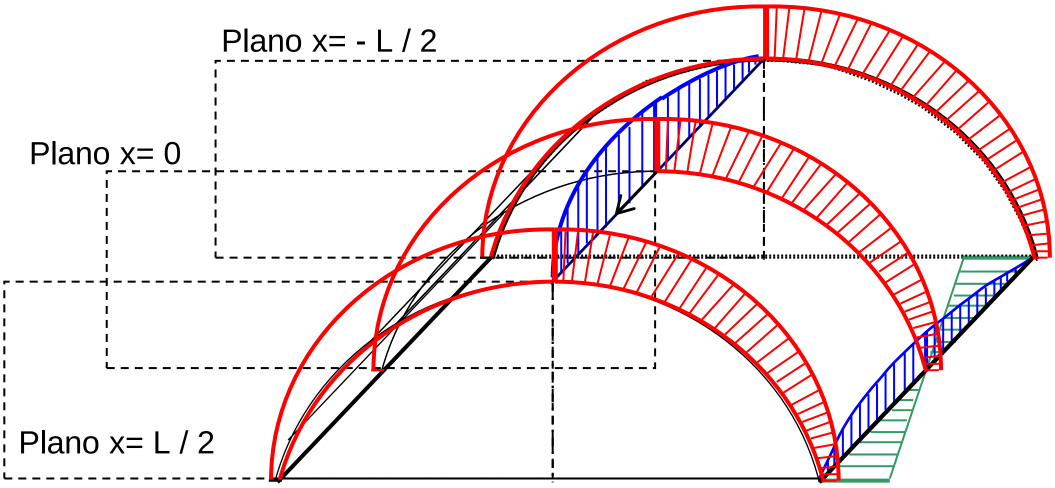
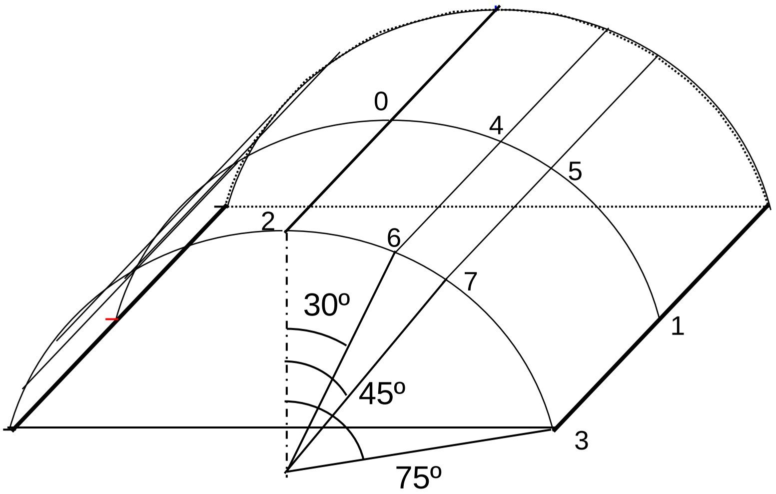


DIAGRAMA RESUMEN





RESUMEN Posición	Coord. φ	Coord. x	Esfuerzos Nφ	Esfuerzos Nx	Esfuerzos Nxφ
0	0º	0,00	-2,07	-1,57	0,00
1	75º	0,00	-0,54	-0,41	0,00
2	0º	9,00	-2,07	0,00	0,00
3	75º	9,00	-0,54	0,00	-3,48
4-Intermedia	30º	0,00	-1,79	-1,36	0,00
5-Intermedia	45º	0,00	-1,40	-1,11	0,00
6-Intermedia	30º	9,00	-1,79	0,00	-1,80
7-Intermedia	45º	9,00	-1,40	0,00	-2,55

Verificación de las máximas tensiones de compresión σ'b, que se originan con la fuerza Nφ en el punto 0 (clave del arco central: φ=0º; x=0)

Nφ = -2,07 t/m (fuerza por unidad de longitud)

Nφ = -2,07 t (en 1 m de ancho)

5 cm de espesor es el mínimo aconsejable para un correcto hormigonado y recubrimiento

$$\sigma'b = \frac{-2.070 \text{ kg}}{6{,}5 \text{ cm x } 100 \text{ cm}} = 3{,}18 \text{ kg/cm}^2 \leq \sigma'b_{adm} = 80 \text{ kg/cm}^2$$

Armadura para controlar la fisuración Malla Q55 - Ø 4,2 c / 25 cm

Verificación de las máximas tensiones tangenciales τ, que se originan con la fuerza Nxφ= Nφx en el punto 3 (apoyo: φ=75º; x=L / 2)

Nxφ = Nφx = 3,48 t (en 1 m de ancho)

$$\tau = \frac{-3.480 \text{ kg}}{6{,}5 \text{ cm x } 100 \text{ cm}} = 5{,}35 \text{ kg/cm}^2 \leq \begin{matrix} \tau_{011} \\ \tau_{adm} = 7{,}5 \text{ kg/cm}^2 \end{matrix}$$

Verificación de la lámina cilíndrica corta, al pandeo

$$\sigma'b_{admP} = \frac{\sigma'b_{critP}}{\gamma} = \frac{1{,}1 \text{ x Eb}}{4{,}5} \text{ x } \frac{t}{L} \sqrt{\frac{t}{r}}$$

$\sigma'b_{admP}$: Tensión admisible de pandeo

$\sigma'b_{critP}$: Tensión crítica de pandeo

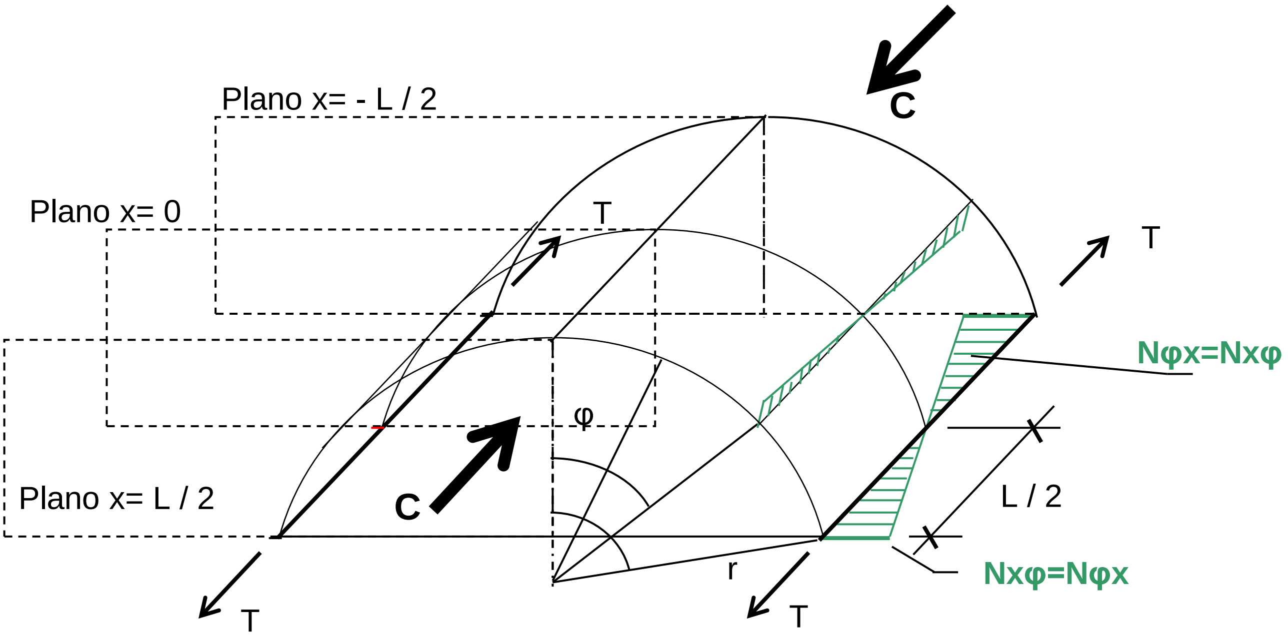
γ : Coeficiente de seguridad entre 4 y 5. (Tomamos 4,5)

t : Espesor de la lámina L : Longitud de la lámina r : Radio de la lámina

En nuestro caso: $\sigma'b_{admP} = \frac{1{,}1 \text{ x } 300.000}{4{,}5} \text{ x } \frac{6{,}5}{1800} \sqrt{\frac{6{,}5}{1035}} = 20{,}98 \text{ kg/cm}^2$

Siendo la máxima solicitación en los puntos de la clave de valor **3,18** kg/cm², no es sobrepasada la tensión admisible de pandeo: entonces VERIFICA

Armadura en el tensor del borde marginal



$T = \frac{1}{4}$ q. L^2 senφ Expresión general

Peso propio: q=g = 0,20 t/m^2

T = 1/4 x 0,20 t/m^2 x $(18{,}00)^2$ x 0,966 = 15,65 t

φ = 75º

sen 75º = 0,966

L = 18,00 m

σe_{adm} = 2.400 (kg/cm^2)

$$Fe_1\ (cm^2) = \frac{T\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ \ (kg/cm^2)} = \frac{15.650\ (kg)}{2.400\ \ (kg/cm^2)} = 6{,}52\ (cm^2)$$

$\boxed{6\ ø\ 12}$

Armaduras de tracción en las esquinas

F = $N x\varphi_{máx}$ (kg) $N x\varphi_{máx}$ = -3,48

$$Fe_2\ (cm^2) = \frac{F\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ \ (kg/cm^2)} = \frac{3.480\ (kg)}{2.400\ \ (kg/cm^2)} = 1{,}45\ (cm^2)$$

$\boxed{5\ ø\ 6}$

en 2 m 10 Ø 6

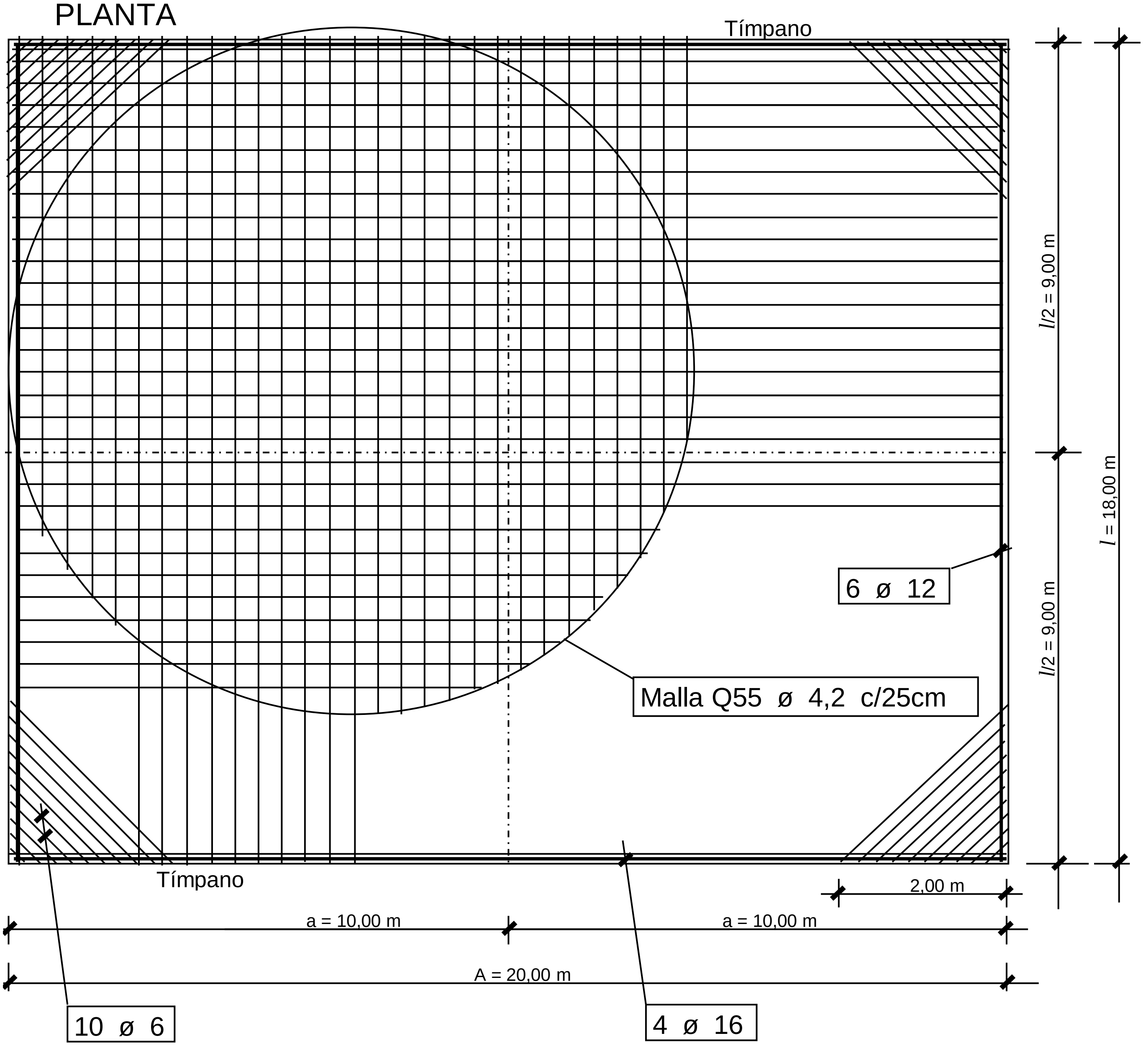
Armadura en el tensor del tímpano

$$Tt = -\frac{1}{2}\,q\,.\,L\,.\,r = \frac{1}{2}\ 0{,}20\ t/m^2\ .\ 18{,}00\ m\ .\ 10{,}35\ m = 18{,}63\ t$$

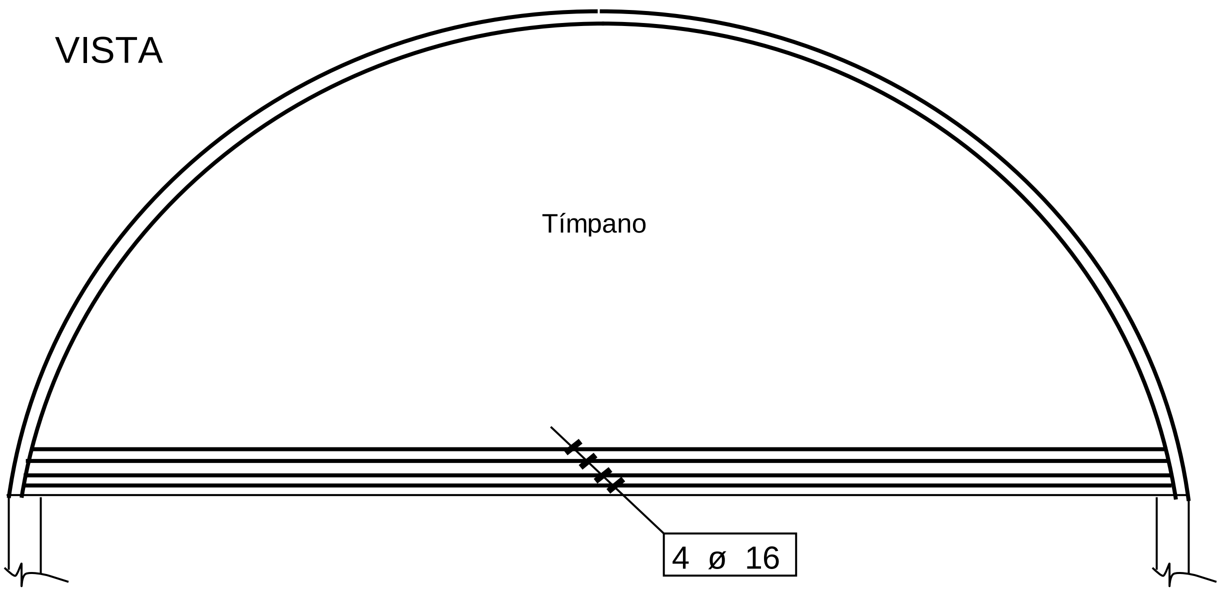
$$Fe_3\ (cm^2) = \frac{Tt\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ \ (kg/cm^2)} = \frac{18.630\ (kg)}{2.400\ \ (kg/cm^2)} = 7{,}76\ (cm^2)$$

$\boxed{4\ ø\ 16}$

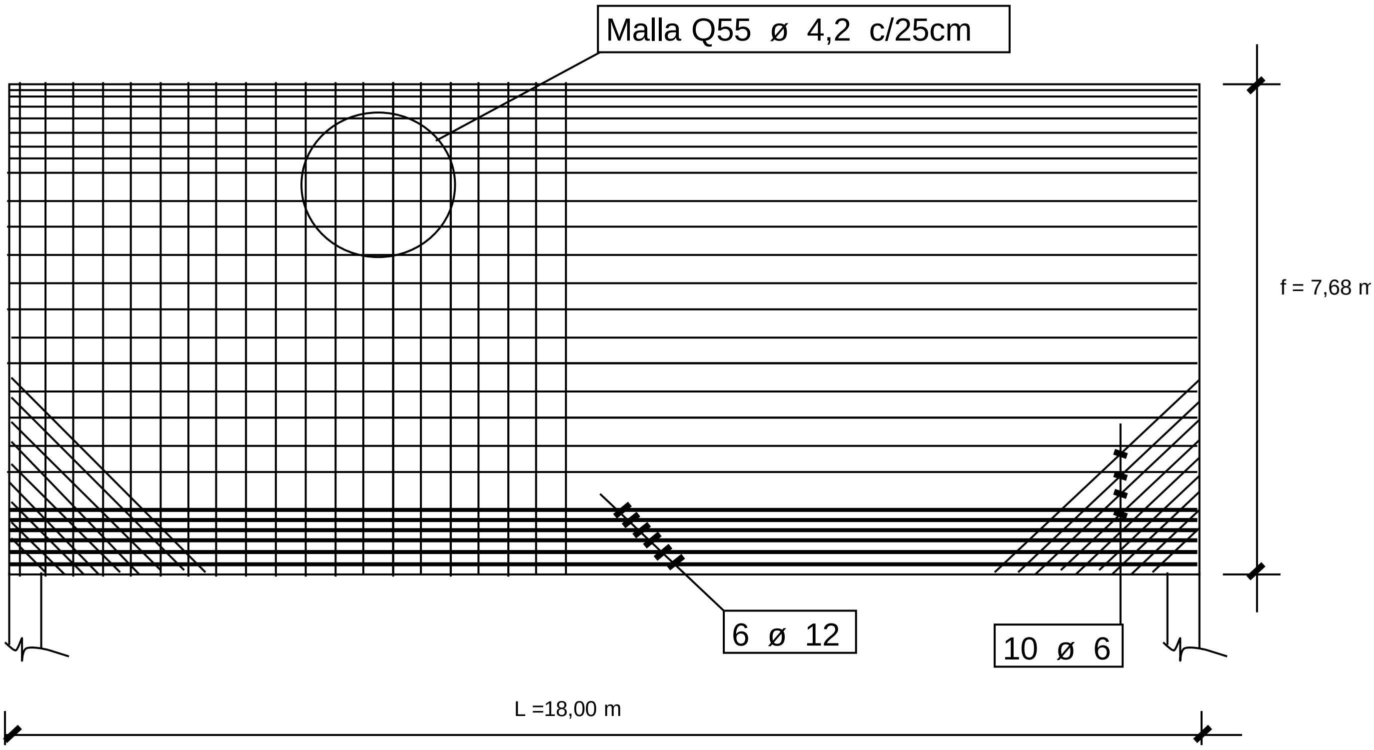
PLANTA

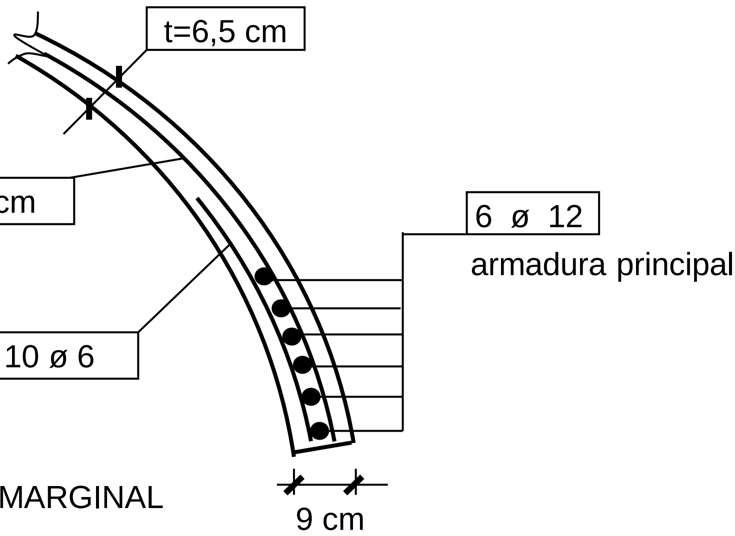


VISTA



VISTA LATERAL



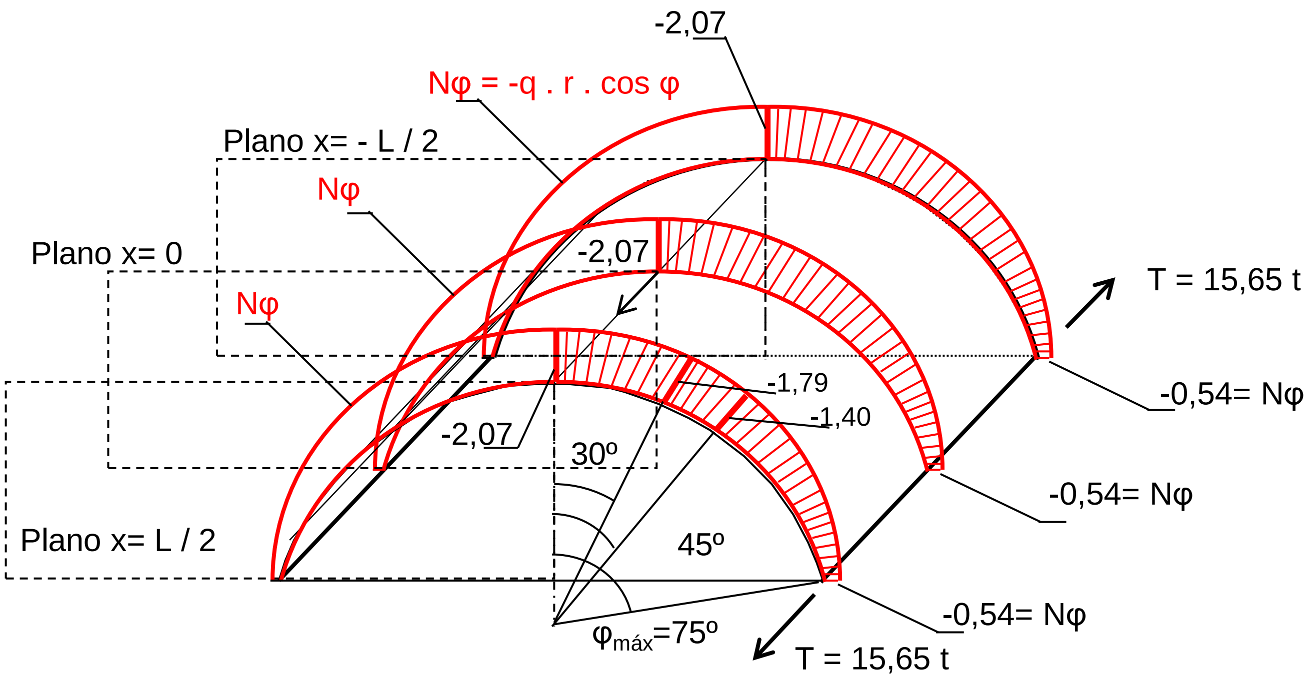


DETALLE ARMADURA BORDE MARGINAL

CÁLCULO DE LA VIGA DE BORDE

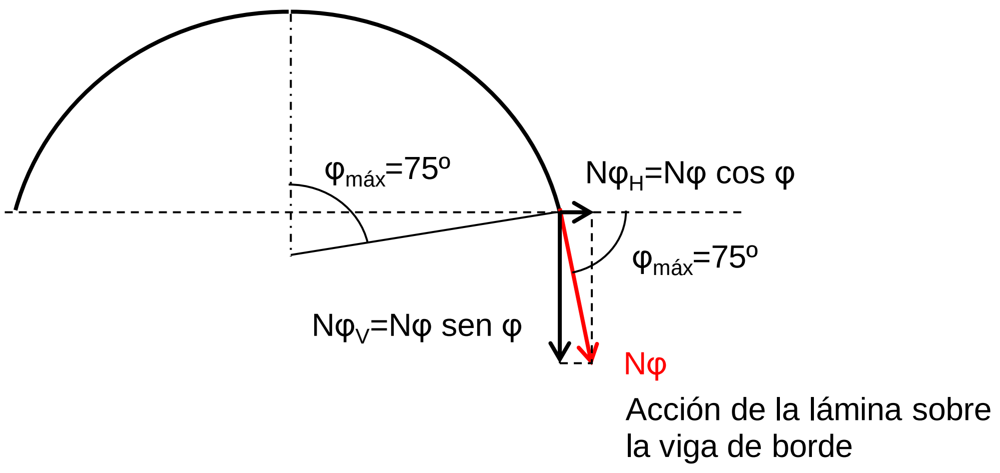
Cuando φ≠ 90º entonces los esfuerzos Nφ≠ 0 y debemos considerarlos.
En nuestro caso:

DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nφ



El momento que producen los esfuerzos Nφ extremas será:

$M = 0{,}54 \times (18{,}00)^2 / 8 = 21{,}87$ tm



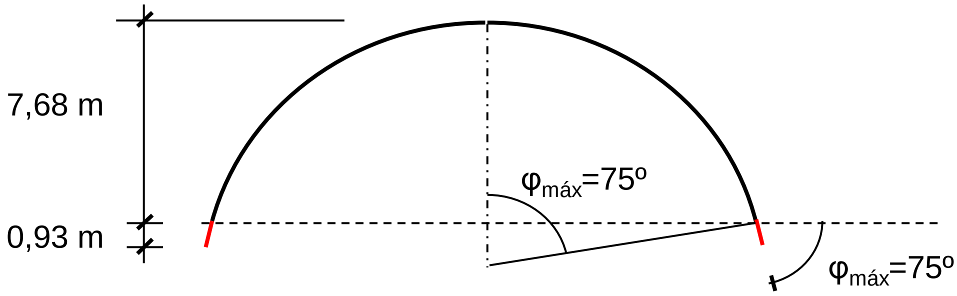
sen 75º = 0,966

cos 75º = 0,259

$N\varphi_H = N\varphi \cos\varphi = 0{,}54 \times 0{,}259 = 140$ kg/m

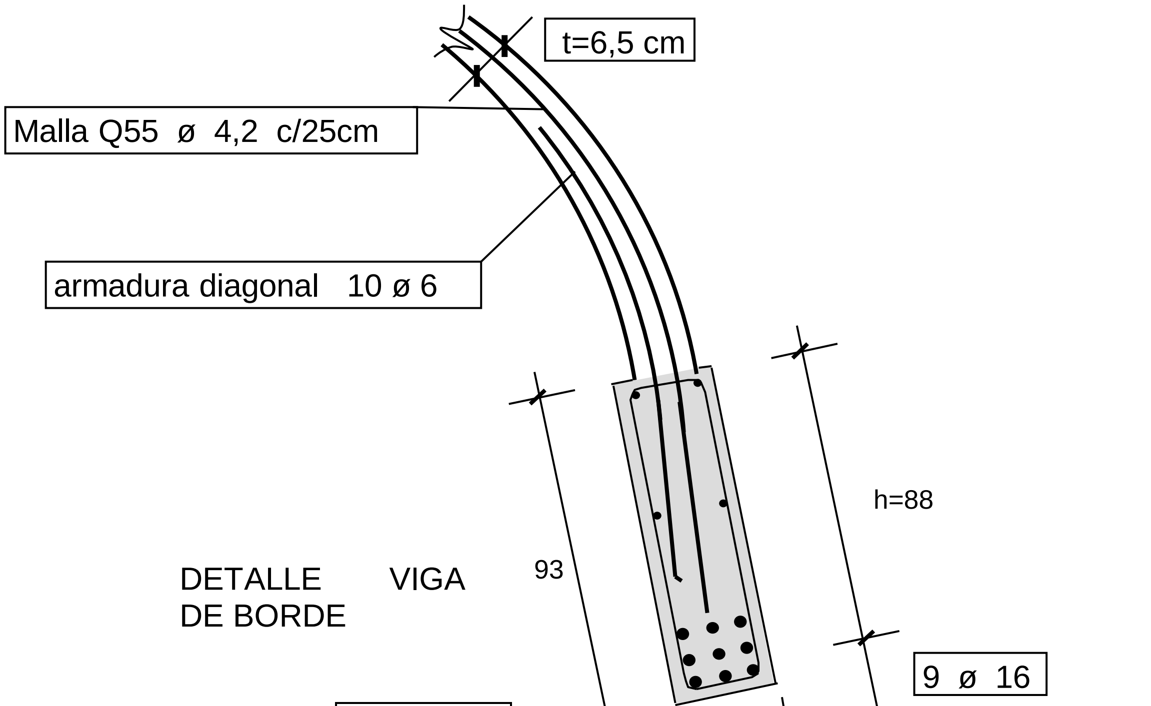
$N\varphi_V = N\varphi \operatorname{sen}\varphi = 0{,}54 \times 0{,}966 = 522$ kg/m

Se puede proyectar una viga de borde con una inclinación φ= 75° sometida a una fuerza de 15,65 t y un momento de M = 21,87 tm, o bien se pueden descomponer los esfuerzos y tomarlos en forma independiente.

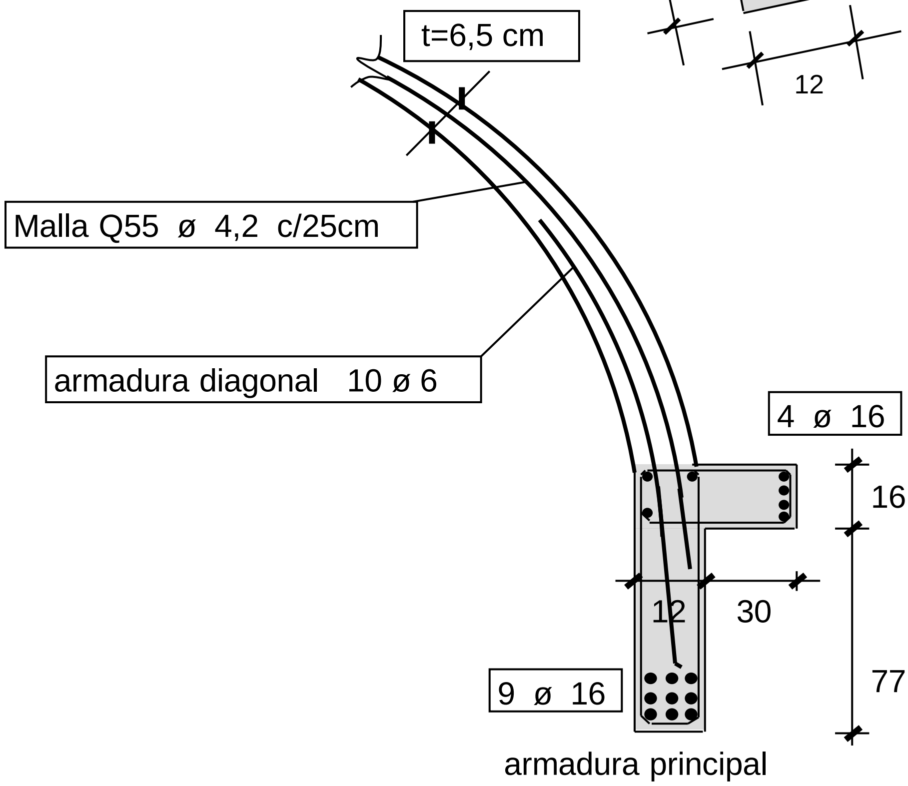


$$Fe\ (cm^2) = \frac{21.870\ (kgm)}{0{,}88\ m \times 0{,}85 \times 2.400\ (kg/cm^2)} + \frac{15.650\ (kg)}{2.400\ (kg/cm^2)} = 18{,}7\ (cm^2)$$

9 ø 16



DETALLE VIGA DE BORDE



COMENTARIOS:

Cuando la lámina cilíndrica es peraltada, tiene suficiente capacidad portante trabajando como viga y en los bordes marginales es necesario solamente colocar un tensor, a los efectos de las tracciones que se producen por causa de los esfuerzos tangenciales. La sección de hormigón se engrosa en dicha zona, para recubrir bien la armadura y asegurarse el comportamiento contra la fisuración.

La capacidad portante máxima se alcanza cuando la flecha (f) es igual al radio (r) en las láminas de directriz circular.

En los casos en que el peralte o flecha (f) son pequeños frente a la luz (L), es necesario incorporar la viga de borde a efectos de mantener la relación H/L entre 1/5 y 1/10. Recordar que H es la suma de la flecha (f) y de la altura de la viga (h). H=f+h

También en los casos en que la tangente a la directriz de la lámina es menor que 90º (φ<90º), el valor del $N\varphi$ en el borde es distinto de cero ($N\varphi \neq 0$) y es necesario tomarlo con una viga de borde (en nuestro caso $N\varphi$= -0,54 t/m)

El esfuerzo $N\varphi$ se toma con una viga según el eje de la tangente a la lámina (en nuestro caso φ=75º) o bien el esfuerzo $N\varphi$ se descompone en una dirección horizontal ($N\varphi_H$) y en otra vertical ($N\varphi_V$)

La materialización de la viga de borde introduce perturbaciones en los esfuerzos membranales de la lámina.

En la práctica se trata de proyectar la viga de borde de modo que cumpla con la finalidad de reemplazar el efecto que la parte inferior de la lámina sustituida ejercía sobre la parte superior, a efectos de que la parte superior de la viga de borde actúe como si no se hubiera cortado la continuidad.

El comportamiento de la estructura dependerá de la relación de rigideces entre lámina y viga.

Si las vigas de borde no son rígidas, la rigidez de la lámina frente a las vigas hace que estas últimas actúen como colgadas de la lámina. Esto trae aparejado que la lámina está soportando el peso propio de la viga de borde y por tal causa el esfuerzo $N\varphi$ estará sometido a esfuerzo de tracción y no de compresión, alterando así las hipótesis originales.

Si por el contrario la viga es muy rígida, esta rigidez le permitirá tomar no solo la carga de su peso propio, sino parte de carga de la lámina alterando el funcionamiento laminar e introduciendo perturbaciones en los esfuerzos.

A la viga de borde es necesaria proyectarla con eficiencia a efector de no perturbar el funcionamiento membranal de la lámina. Se considera que los esfuerzos $N\varphi$ que trasmite la lámina a la viga de borde, produce deformaciones que deben ser compatibles con las deformaciones de la lámina. En la compatibilidad de las deformaciones del conjunto (lámina-viga de borde) está la eficiencia del diseño.

EJERCICIO RESUELTO (LÁMINA LARGA)

CONSIGNA: Superficie a cubrir 20,00 m x 40,00 m

RESOLUCIÓN: Consideramos "a priori" un espesor de 7 cm

Hormigón: g_1 = 0,07 m x 2,4 t/m^3 = 0,168 t/m^2

Aislaciones térmica e hidráulica: g_2 = 0,082 t/m^2

Peso propio: g = 0,25 t/m^2

MATERIALES

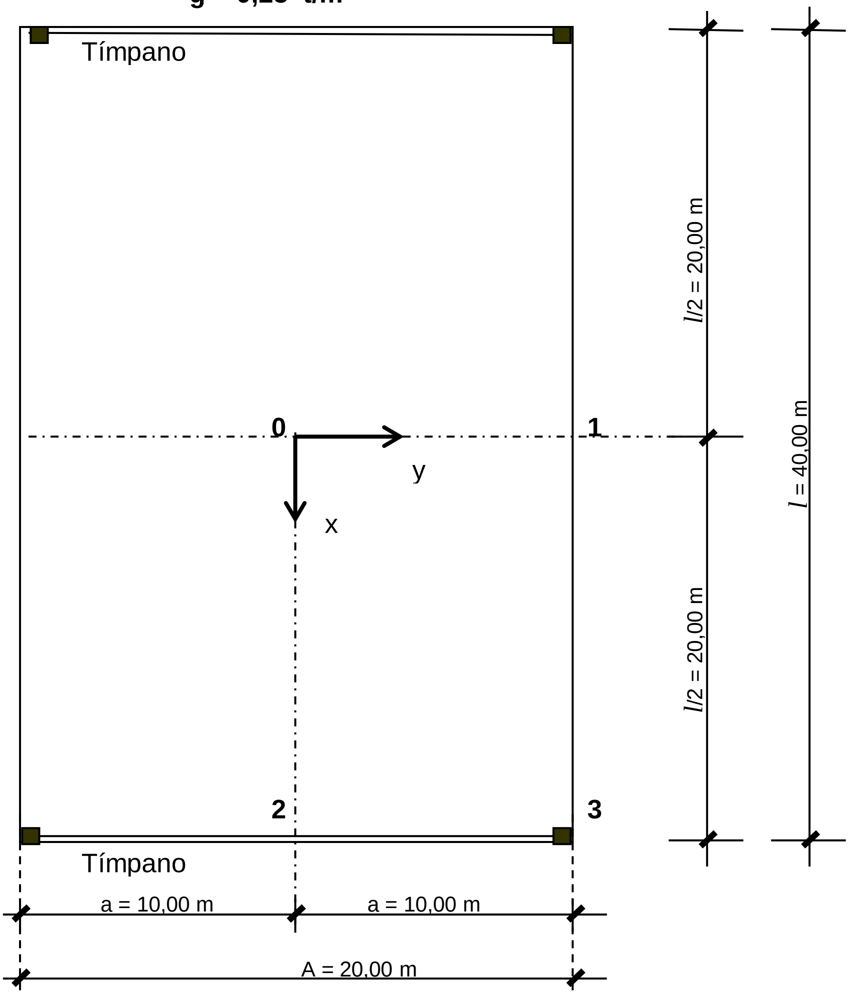
H21 = $\sigma'b$ = 210 kg/cm^2

$\sigma'b_{adm}$ = 80 kg/cm^2

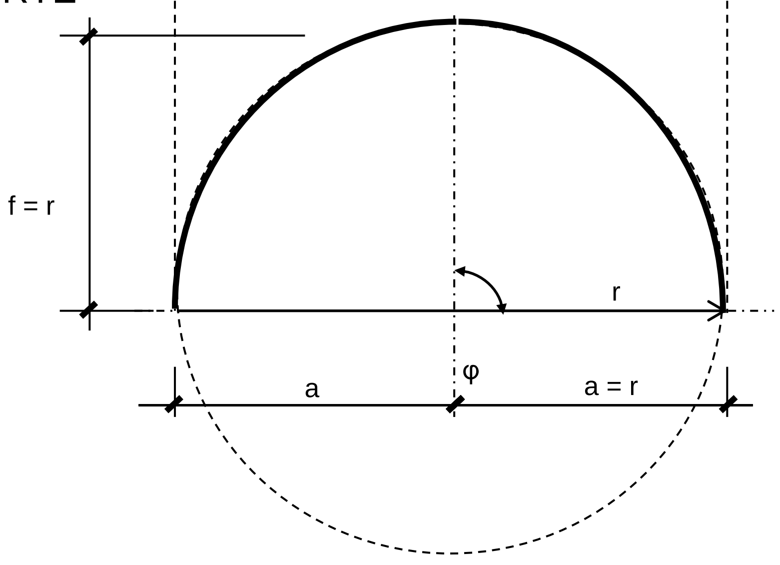
Eb = 300.000 kg/cm^2

σe_{adm} = 2.400 (kg/cm^2)

PLANTA



CORTE



φ = 90º

sen φ = sen 90º = 1

r = 10,00 m

f = 10,00 m

así tenemos las medidas:

a = 10,00 m	A = 20,00 m
f = 10,00 m	L = 40,00 m
r = 10,00 m	φ = 90º

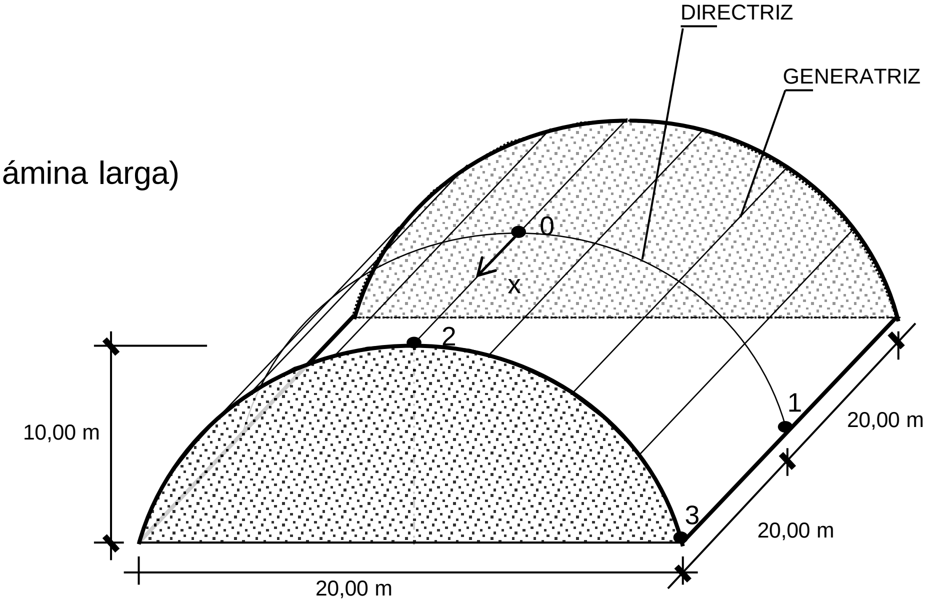
La relación: espesor / radio, debe mantenerse entre los siguientes valores:

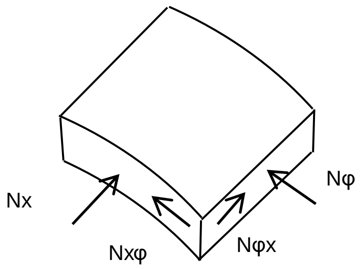
$$\frac{1}{250} \leq \frac{t}{r} \leq \frac{1}{100} \qquad 0{,}004 \leq \frac{t}{r} \leq 0{,}01 \qquad \frac{t = 0{,}07\ m}{r = 10{,}00\ m} = 0{,}007 \ \text{VERIFICA}$$

Calculamos los esfuerzos aplicando la teoría membranal:

En nuestro caso:

$$\frac{L = 40{,}00\ m}{r = 10{,}00\ m} = 4 > 2 \ \text{(lámina larga)}$$





Nφ : Esfuerzo en la dirección de la directriz

Nx : Esfuerzo en la dirección de la generatriz

$$N\varphi = -q \,.\, r \,.\, \cos \varphi$$

$$Nx = \frac{-2q}{r}\left[\frac{L^2 - 4x^2}{8}\right]\cos \varphi = \frac{-q}{r}\left[\frac{L^2}{4} - x^2\right]\cos \varphi$$

$$Nx\varphi = N\varphi x = -2q \,.\, x \,.\, \text{sen}\, \varphi$$

$\boxed{\text{Para el punto 0:} \quad \varphi = 0º \qquad x = 0}$

Peso propio: g = 0,25 t/m^2

En este ejemplo, no consideramos sobrecargas (p=0), entonces g = q

$$N\varphi = -0{,}25\ t/m^2 \,.\, 10{,}00\ m = -2{,}5\ t/m$$

$$Nx = \frac{-2 \times 0{,}25\ t/m^2}{10{,}00\ m}\left[\frac{40{,}00^2}{8}\right] = -10{,}0\ t/m$$

$$Nx\varphi = N\varphi x = 0$$

Para el punto 1: $\varphi = 90º$ $x = 0$

$N\varphi = 0$ t/m

cos 90º = 0

$Nx = 0$ t/m

$Nx\varphi = N\varphi x = 0$

Para el punto 2: $\varphi = 0º$ $x = L / 2 = 20{,}00$ m

$N\varphi = -0{,}25 \text{ t/m}^2 \ . \ 10{,}00 \text{ m} = -2{,}5 \text{ t/m}$

$$Nx = \frac{-2 \times 0{,}20 \text{ t/m}^2}{10{,}35 \text{ m}} \left[\frac{40{,}00^2 - 4 \times 20{,}00^2}{8} \right] = 0$$

$Nx\varphi = N\varphi x = 0$

Para el punto 3: $\varphi = 90º$ $x = L / 2 = 20{,}00$ m

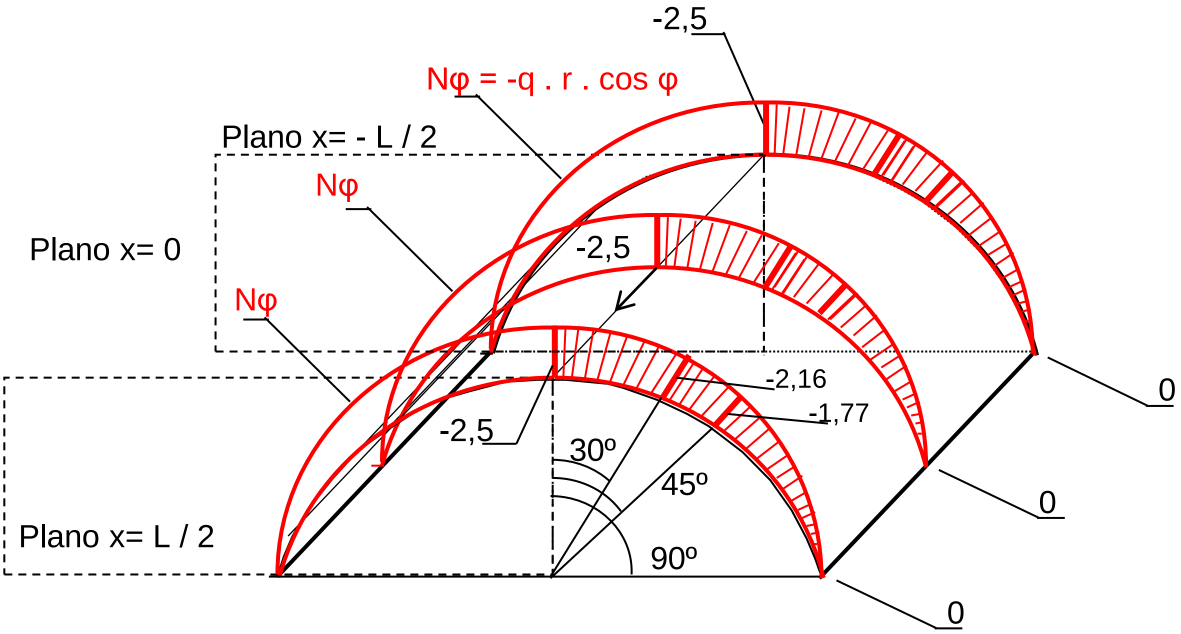
$N\varphi = 0$ t/m

sen 90º = 1

$Nx = 0$ t/m

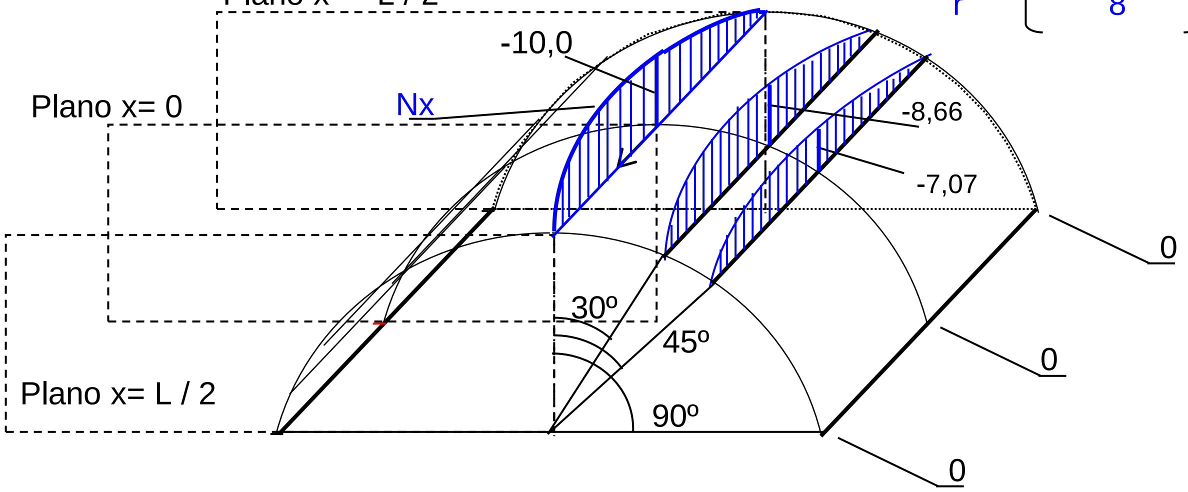
$Nx\varphi = N\varphi x = -2 \times 0{,}25 \text{ t/m}^2 \times 20{,}00 \text{ m} \times 1 = -10{,}00$ t/m

DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS $N\varphi$



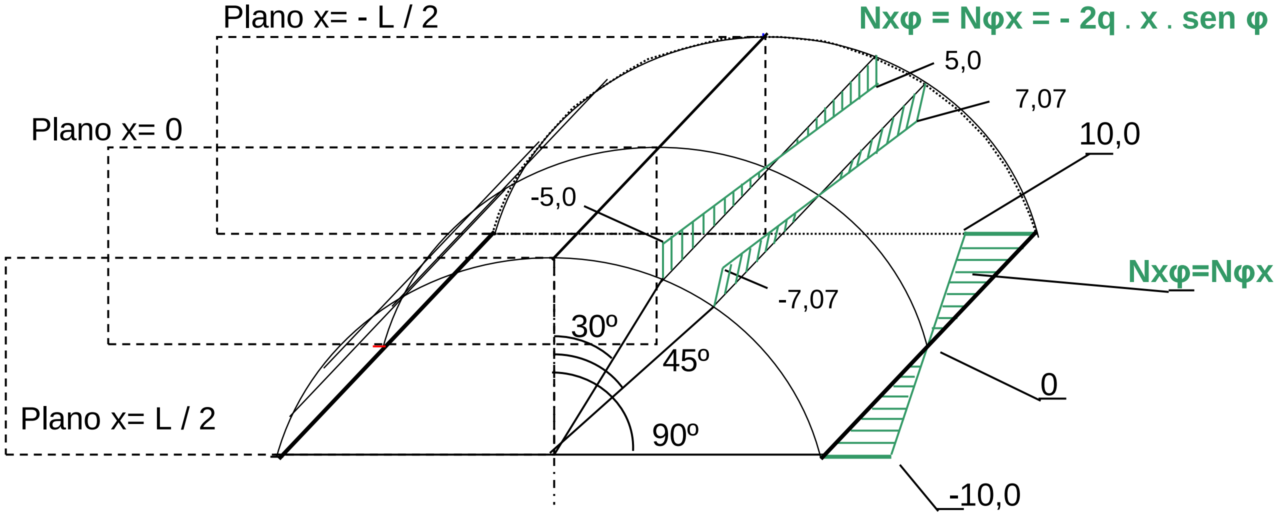
DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nx

$$Nx = \frac{-2q}{r}\left[\frac{L^2 - 4x^2}{8}\right]\cos\varphi$$



DIAGRAMAS DE LOS ESFUERZOS Nxφ = N φx

$$\mathbf{Nx\varphi = N\varphi x = -\,2q\,.\,x\,.\,sen\,\varphi}$$



Verificación de las máximas tensiones de compresión σ'b, que se originan con la fuerza Nx en el punto 0 (clave del arco central: φ=0º; x=0)

Nφ = -10,0 t/m (fuerza por unidad de longitud)

$$\sigma'b = \frac{-10.000\ kg}{7\ cm \times 100\ cm} = 14{,}3\ \ kg/cm^2 \leq \ \sigma'b_{\,adm} = 80\ kg/cm^2$$

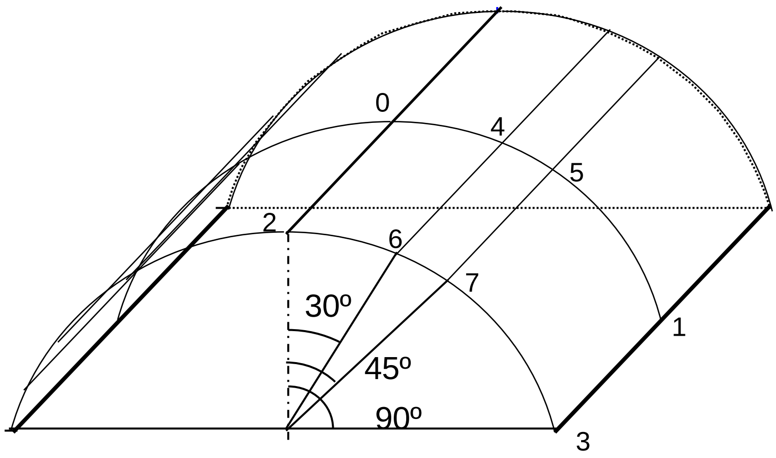
Ver el ejemplo de la página 14

Verificación de las máximas tensiones tangenciales τ, que se originan con la fuerza Nxφ= Nφx en el punto 3 (apoyo: φ=90º; x=L / 2)

Nxφ = Nφx = 10,0 t (en 1 m de ancho)

$$\tau = \frac{-10.000\ kg}{7\ cm \times 100\ cm} = 14{,}3\ \ kg/cm^2 \leq \ \ \begin{matrix}\tau_{\,02} \\ \tau_{\,adm} = 18\ kg/cm^2\end{matrix}$$

Necesita armadura



RESUMEN	Posición	Coord.		Esfuerzos		
		φ	x	Nφ	Nx	Nxφ
	0	0º	0,00	-2,50	-10,0	0,00
	1	90º	0,00	0,00	0,00	0,00
	2	0º	20,0	-2,50	0,00	0,00
	3	90º	20,0	0,00	0,00	-10,0
4-Intermedia		30º	0,00	-2,16	-8,66	0,00
5-Intermedia		45º	0,00	-1,77	-7,07	0,00
6-Intermedia		30º	20,0	-2,16	0,00	-5,00
7-Intermedia		45º	20,0	-1,77	0,00	-7,07

Verificación de la lámina cilíndrica larga al pandeo

$$\sigma'b_{admP} = 0,2 \times Eb \times \frac{t}{r}$$

$\sigma'b_{admP}$: Tensión admisible de pandeo
Eb = módulo de elasticidad del hormigón
t : Espesor de la lámina
r : Radio de la lámina

En nuestro caso:

$$\sigma'b_{admP} = 0,2 \times 300.000\ kg/cm^2 \times \frac{7\ cm}{1000\ cm} = 42,0\ kg/cm^2$$

Siendo la máxima solicitación en los puntos de la clave de valor **14,3** kg/cm², no es sobrepasada la tensión admisible de pandeo: entonces VERIFICA

Armadura en el tensor del borde marginal

$$T = \frac{1}{4}\ q.\ L^2\ \text{sen}\varphi$$ Expresión general

$\varphi = 90º$
sen 90º = 1
L = 40,00 m
$\sigma e_{adm} = 2.400\ (kg/cm^2)$

Peso propio: q=g = 0,25 t/m²

$$T = 1/4 \times 0,25\ t/m^2 \times (40,00)^2 \times 1 = 100,0\ t$$

$$Fe_1\ (cm^2) = \frac{T\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ (kg/cm^2)} = \frac{100.000\ (kg)}{2.400\ (kg/cm^2)} = 41,67\ (cm^2)$$

$\boxed{20\ ø\ 16}$

Armaduras de tracción en las esquinas

$F = Nx\varphi_{máx}\ (kg)$ $Nx\varphi_{máx} = -10,0$

$$Fe_2\ (cm^2) = \frac{F\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ (kg/cm^2)} = \frac{10.000\ (kg)}{2.400\ (kg/cm^2)} = 4,17\ (cm^2)$$

$\boxed{5\ ø\ 10}$

en 2 m 10 Ø 10

Armadura en el tensor del tímpano

$$Tt = -\frac{1}{2}\ q\ .\ L\ .\ r = \frac{1}{2}\ 0,25\ t/m^2\ .\ 40,00\ m\ .\ 10,0\ m = 50,0\ t$$

$$Fe_3\ (cm^2) = \frac{Tt\ (kg)}{\sigma e_{adm}\ (kg/cm^2)} = \frac{50.000\ (kg)}{2.400\ (kg/cm^2)} = 20,8\ (cm^2)$$

$\boxed{10\ ø\ 16}$