

|   |  |           |             |
|---|--|-----------|-------------|
| UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA - FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO           |  |           |             |
|  | Cátedra: <b>ESTRUCTURAS – NIVEL 2 - PLAN DE ESTUDIOS 6</b> |           |             |
|   | Taller: VERTICAL III – DELALOYE - NICO - CLIVIO            |           |             |
|   | <b>Guía de Estudio N° 6: TORSION</b>                       |           |             |
| Curso 2013  | Elaboró: Ing. Horacio Delaloye                             | Revisión: | Fecha: 2013 |

## GUIA DE ESTUDIO N° 6 TORSION

### 1) INTRODUCCION

La torsión como efecto se presenta en una sección transversal cuando la recta de acción de la carga  $P$ , contenida en dicho plano, no pasa por el centro de gravedad  $C.G$  de dicha sección, como puede verse en la figura 1.

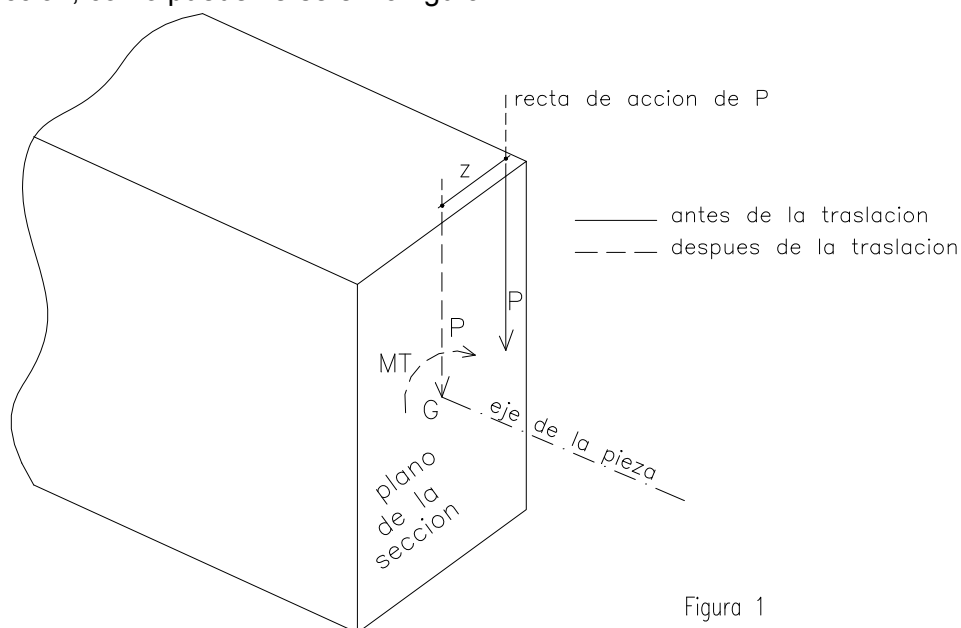


Figura 1

Si la recta de acción de la carga  $P$  pasa a una distancia  $z$  de  $C.G.$ , al hacer la traslación de fuerzas a dicho punto aparecerá un momento, que por estar contenido en el plano de la sección y tender a distorsionar la misma, se denomina momento torsor  $MT$ .

En la práctica, la torsión pura como efecto raramente aparece y en general se encuentra combinada con otros, como flexión, corte y axil, pero su aparición no es tan frecuente como estos últimos.

Cuando la torsión no es imprescindible para lograr el equilibrio, en algunos casos al dimensionar la pieza el efecto puede desprejarse. Se distinguen dos casos, la torsión de equilibrio y la torsión de compatibilidad, en los ejemplos mostrados en el punto 2 se aclarará este concepto.

El hormigón no es un buen material para resistir torsión, es por ello que en el diseño de estructuras se trata de reducir a un mínimo la cantidad de elementos sometidos a este efecto.

Cuando la torsión actúa sobre piezas de hormigón armado, si no se disponen las armaduras adecuadas, puede generar roturas de tipo frágil (sin previo aviso) que son realmente peligrosas.

La colocación de armaduras, convenientemente dispuestas y en la cantidad necesaria, permiten dotar a la pieza de la ductilidad necesaria. Recordemos que un

elemento dúctil avisa que romperá, aparecen deformaciones importantes, fisuras, y se pueden tomar las medidas preventivas del caso.

## 2) ELEMENTOS ESTRUCTURALES SOMETIDOS A TORSIÓN - EJEMPLOS

Sin pretender brindar una lista completa de elementos sometidos a este tipo de esfuerzo, con la única finalidad de ilustrar al alumno, expondremos algunos ejemplos.

### 2.1) Viga con carga excéntrica de paredes

Este es un caso de torsión de equilibrio.

Como la recta de acción de la carga  $P$  no pasa por el centro de gravedad de la sección, aparece un momento torsor  $M_t = P \times e$  (tm/m) a lo largo de la viga, es un caso de momento torsor repartido o distribuido.

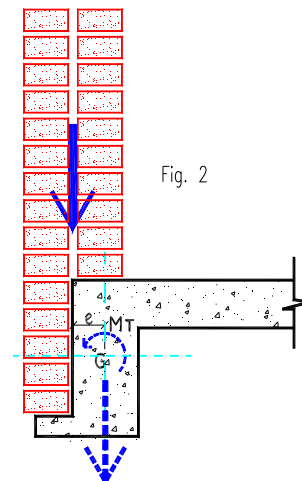


Fig. 2

### 2.2) Torsión en una viga con ménsula en voladizo

Este es un caso de torsión de equilibrio, no se puede despreciar su efecto porque es imprescindible para mantener la estabilidad de la ménsula BD.

La ménsula está sometida a corte de valor  $P$  y a un momento flector variable de 0 en el punto D al valor  $M = P \times z$  en B (empotramiento de la ménsula en el dintel del pórtico).

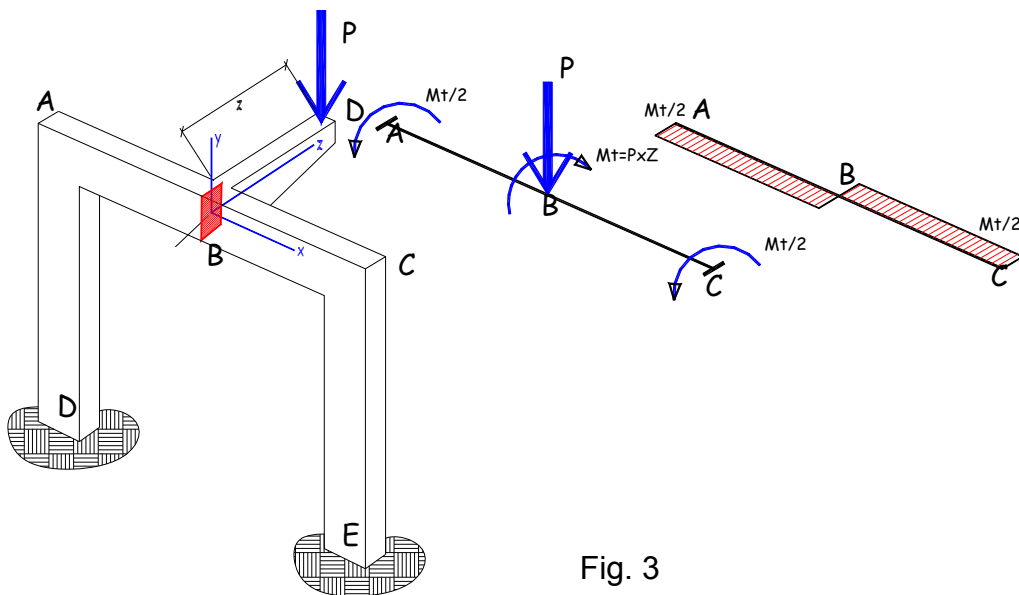


Fig. 3

El momento de empotramiento de la ménsula, y la reacción  $P$  se transfieren a la viga (dintel) AC como una carga concentrada de valor  $P$  y un momento torsor  $M_t = P \times z$ , en el punto B.

Las solicitaciones para el pórtico serán:

Flexión y corte en AC provocadas por P

Torsión en AC provocadas por  $M_t = P \times z$

Axil en las columnas AD y CE

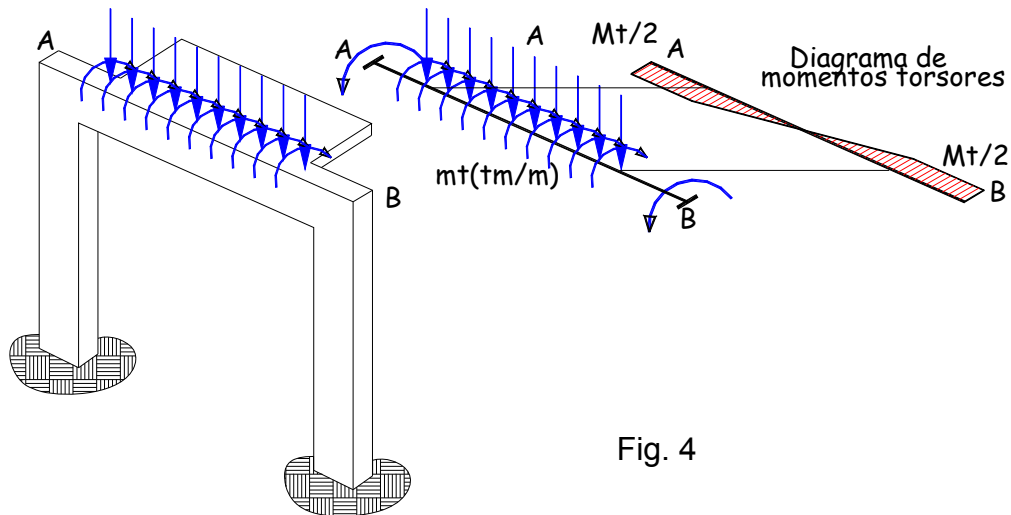
Momento flector en las columnas generado por el momento de empotramiento del tramo AC.

### 2.3) Losa en voladizo empotrada en una viga

Es otro caso de torsión de equilibrio.

Cuando no existe solución de continuidad con otras losas, el empotramiento debe hacerse en la viga AB. Es un caso de momento torsor repartido.

Para que exista equilibrio, la losa debe estar empotrada en la viga AB.



En el empotramiento las reacciones para la losa son:

- Reacción vertical R (distribuida a lo largo de la línea de apoyo) en t/m.
- Momento flector de empotramiento  $M_f$  en tm/m

Estas reacciones de la losa se transfieren a la viga en una carga lineal y un momento torsor, aplicados en toda la zona de unión.

### 2.4) Vigas en ochava

En este caso se trata torsión de compatibilidad o torsión inducida por flexión.

Cuando dos vigas en voladizo se interceptan y existe unión monolítica entre las mismas, la flexión de una se transforma en torsión para la otra.

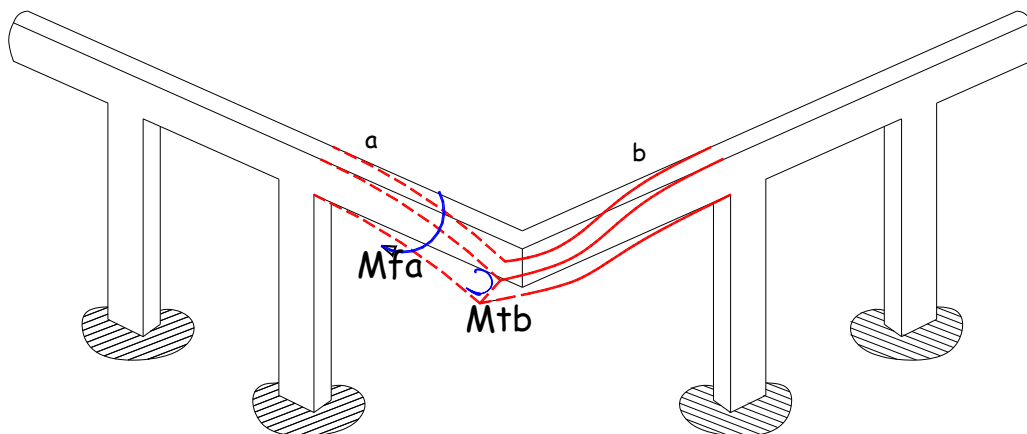


Fig. 5

Si a efectos del razonamiento, consideramos por un momento que la ménsula (b) está empotrada en la (a), veremos que al flexionar (a) en su extremo se produce un giro por flexión, que provoca torsión en (b).

El mismo análisis lo podemos hacer pensando (a) empotrada en (b).

La magnitud del efecto torsor depende fundamentalmente de la facilidad que tengan las ménsulas para girar en su extremo, que a su vez depende de la rigidez y de las cargas actuantes y en principio será mayor en ménsulas muy largas y esbeltas con cargas de magnitud considerable.

NOTA: Como puede verse en los ejemplos anteriores, para la determinación de sollicitaciones (esfuerzos característicos), los momentos torsores actuantes pueden tratarse como cargas aplicadas sobre las estructuras y el diagrama de esfuerzos de corte obtenido bajo esta consideración será el diagrama de momentos torsores.

Los momentos torsores concentrados  $M_t$  se tratan como una carga concentrada  $P$

Los momentos torsores distribuidos  $m_t$  como una carga distribuida  $q$ .

## 2.5) Vigas apeadas en otras vigas

Es este otro caso (fig. 6) de torsión de compatibilidad.

La compatibilidad de deformaciones entre la viga transversal y las vigas de los bordes, hacen que estas sufran una torsión no indispensable para el equilibrio del sistema. Esta es la Torsión de Compatibilidad. A los efectos del dimensionamiento se la puede ignorar.

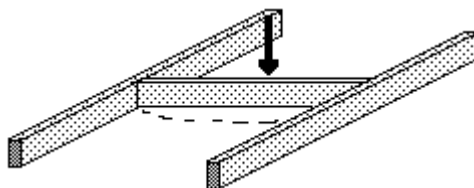


Fig. 6

---

### 3) TENSIONES Y DEFORMACIONES PROVOCADAS POR TORSION

La torsión, al igual que el corte genera tensiones de tipo tangencial, contenidas en el plano de la sección, a diferencia de los esfuerzo de flexión y axil que provocan tensiones normales al plano de la sección.

En la formulación matemática existe cierta similitud con la forma de las expresiones utilizadas para el análisis a flexión.

|                           | FLEXION                  | TORSION           |
|---------------------------|--------------------------|-------------------|
| Deformaciones específicas | $\varepsilon = \sigma/E$ | $\gamma = \tau/G$ |
| Tensiones                 | $\sigma_{fl} = M/W$      | $\tau = Mt/Wt$    |

$\varepsilon$  : Deformación específica  
 $\sigma$  : Tensión normal  
E : Módulo de elasticidad del material

$\gamma$  : Deformación angular específica  
 $\tau$  : Tensión tangencial  
G : Módulo de elasticidad transversal

El módulo de elasticidad transversal G se relaciona con el de elasticidad E según la siguiente expresión:

$$G = E / [2x(1+\mu)]$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de Poissón y relaciona la contracción lateral con el alargamiento unitario, es adimensional.

$$\mu = (\text{contracción lateral}) / (\text{alargamiento unitario})$$

De ensayos se ha obtenido, para distintos materiales el valor de  $\mu$

|       | Hormigón   | Acero | Goma | Corcho |
|-------|------------|-------|------|--------|
| $\mu$ | 1/8 a 1/12 | 0.30  | 0.50 | 0      |

La ley de variación de las tensiones tangenciales depende de la forma de la sección.

Las únicas secciones que se mantienen planas (sin alabeo) al someterlas a un giro relativo de torsión son las de contorno circular.

Todos los demás tipos de secciones se alabean, los puntos de la sección sufren corrimientos según el eje longitudinal de la pieza.

Cuando las piezas son de contorno circular, la variación de tensiones tangenciales en la sección es lineal, como la indicada en la figura, con valor nulo en el centro y máximo en las fibras más alejadas del mismo.

El  $\tau$  máx. ocurre en el radio máximo.

$$\tau \text{ máx.} = Mt/Wt$$

**Mt** : Momento torsor actuante en la sección

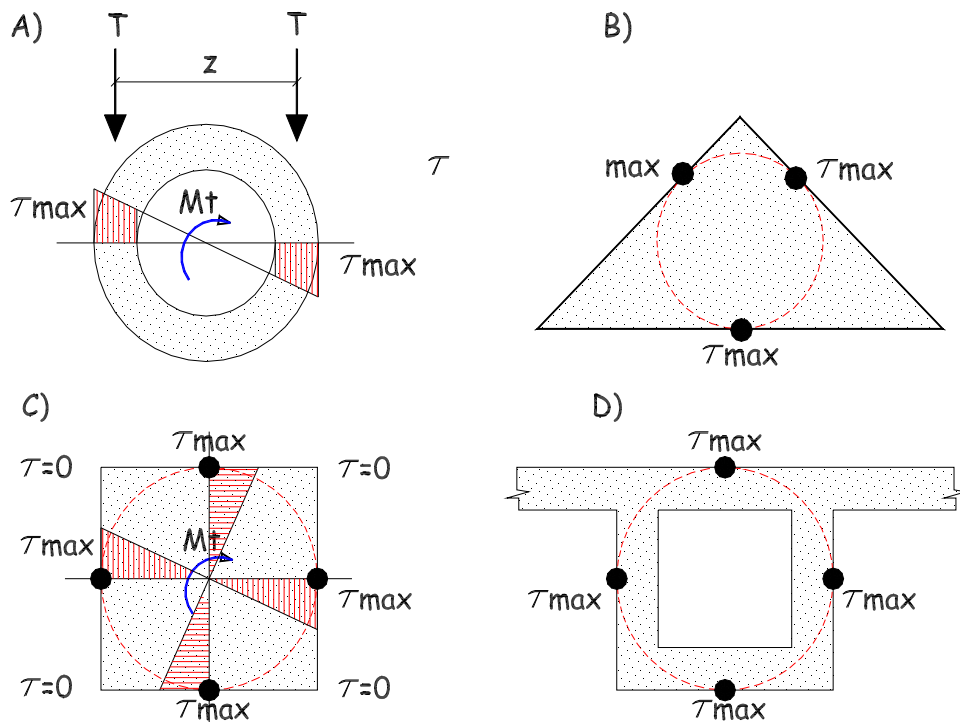
**Wt**: Módulo resistente a torsión.

Los valores de Wt para distintas secciones se pueden obtener de la tabla 1 anexa.

De la comparación entre una sección circular maciza y una hueca, a igualdad de secciones ( $S_1 = S_2$ ) la sección hueca tiene un módulo resistente mayor que la maciza y por ende menores tensiones tangenciales.

Las secciones más eficientes a torsión resultan ser las huecas de contorno cerrado, pues a igualdad de material empleado aumentan su módulo resistente, es decir que el caño en torsión sería el equivalente al doble T en flexión.

A continuación se indican los puntos donde ocurren las máximas tensiones tangenciales para distintos tipos de secciones. En las figuras se puede ver que en general el material realmente aprovechable en la resistencia a torsión de una pieza es el que se encuentra inscrito en el mayor círculo que pueda contener el contorno de la sección.



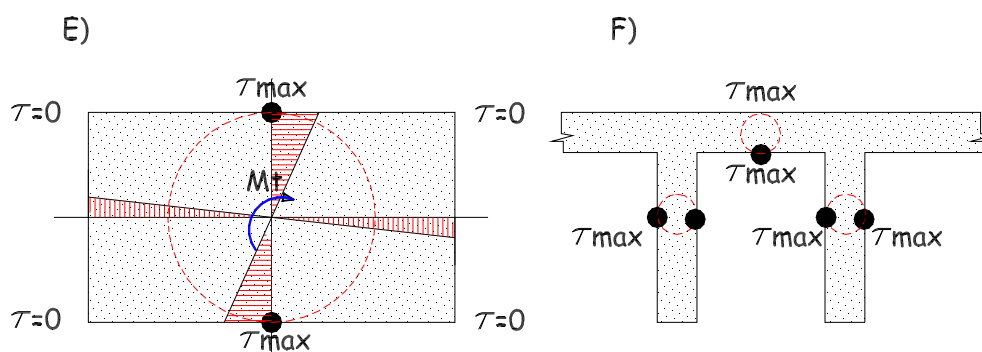


Fig. 7

#### 4) FUNCIONAMIENTO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES A TORSION

Si tomamos una pieza como la indicada en la figura, la sometemos a torsión y analizamos un elemento de su superficie, veremos que el mismo sufre una deformación como producto de las tensiones tangenciales indicadas.

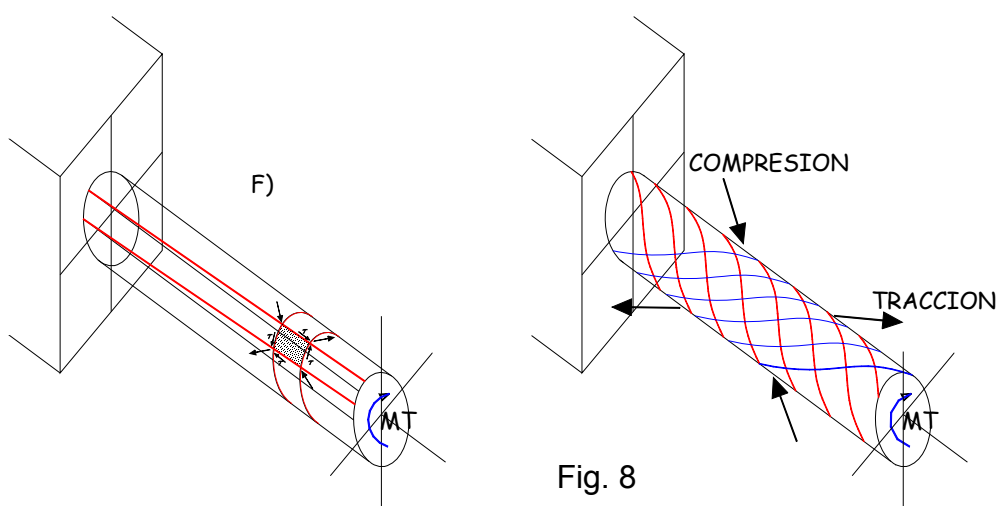


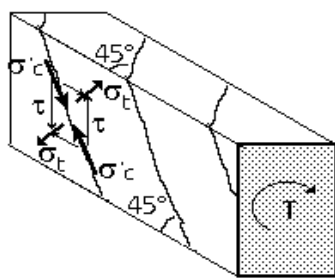
Fig. 8

Si hacemos una composición de dichas fuerzas tangenciales veremos que resultan dos fuerzas iguales y opuestas que tienden a traccionar el elemento y dos que lo comprimen. La inclinación de estas resultantes, referidas al eje de la pieza es de  $45^\circ$

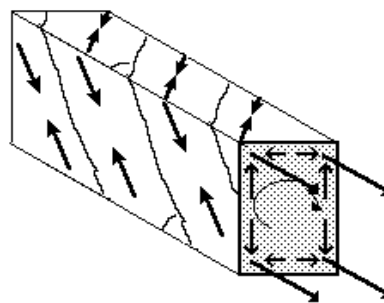
Si este análisis se repite en una serie de elementos veremos que uniendo la trayectoria de las resultantes de tracción se genera una hélice de tracción, y en sentido opuesto a la anterior se generará la correspondiente hélice de compresión.

#### 5) ELEMENTOS DE HORMIGÓN

Ahora tomemos una pieza de hormigón simple (o cualquier material frágil) que no resiste bien las tracciones y la sometemos a un momento torsor  $T$  aplicado en su extremo como se indica en la figura.



(a)



(b)

Fig. 9

Si incrementamos dicho momento hasta llegar a la rotura, veremos que se generan fisuras a 45° respecto del eje de la pieza.

Estas fisuras tienen continuidad en todas las caras, asimilando las trayectorias a las de un helicoides.

Veamos cuales son las causas que dan origen a dichas fisuras.

Si se analiza nuevamente un elemento, que puede estar ubicado en cualquiera de las caras de la viga veremos que está sometido a tensiones  $\tau$  provocadas por la torsión

Como conocemos el sentido de  $\tau$  sobre la cara en la cual actúa  $M_t$ , por razones de equilibrio podemos deducir el sentido de las mismas sobre las restantes caras del elemento.

Como se hiciera en el análisis anterior, la composición de las  $\tau$  nos permiten encontrar las resultantes de  $\sigma_T$  de tracción y  $\sigma_C$  de compresión, de donde concluimos que la diagonal DB se encuentra comprimida mientras que la diagonal AC está traccionada. Esta es la causa de la rotura de la pieza, dada su escasa resistencia a tracción que induce fisuras según BD.

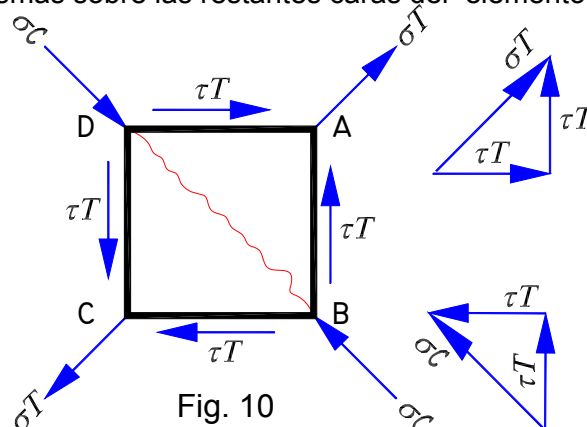


Fig. 10

Si continuamos con el análisis de la pieza, a medida que aumenta el momento torsor  $T$ , las tensiones tangenciales  $t$  van aumentando y por ende las tensiones de tracción  $sT$ . Hasta la aparición de la primer fisura (que corresponde a un momento  $T_r$ ) las armaduras prácticamente no trabajan, o sea la incidencia sobre ellas es prácticamente insignificante y la pieza se comporta como si fuese de hormigón simple.

Cuando superamos el valor  $T=T_r$ , empiezan a aparecer más fisuras en otras caras. Con las fisuras viene aparejada una pérdida de Rigidez Torsional; según algunos autores, esta pérdida es del orden del 85 - 90 %.

Esto es importante, pues cuando resuelvo una estructura hiperestática, le asigno una rigidez torsional baja, casi nula (caso del momento torsor de compatibilidad).



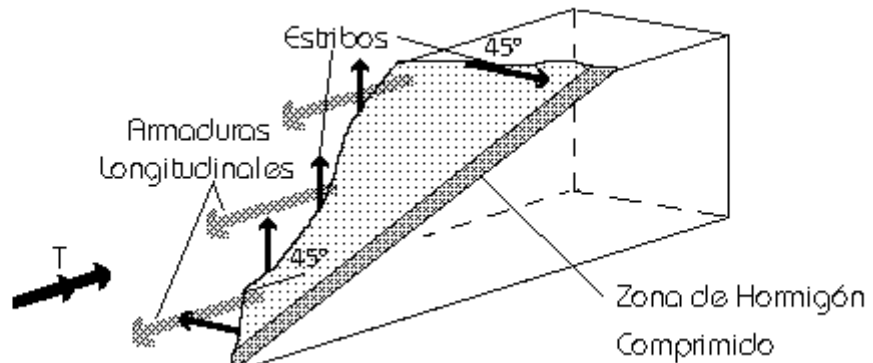


Fig. 11

Luego de la gran pérdida de rigidez, las fisuras se abren y comienzan a traccionarse los estribos; luego, las fisuras empiezan a inclinarse más.

Si continuamos aumentando  $T$ , llego a un punto en que podemos decir, que a esta altura todas las armaduras están traccionadas, tanto longitudinales como estribos; debido a la acción del momento solicitante, que produce la fisuración y estiramiento de la pieza. A partir de éste punto hay aumento de deformaciones aun sin aumentar la carga. Estamos en las proximidades del punto donde la pieza se rompe, es decir que prácticamente hemos alcanzado la Carga de Rotura " $T_u$ ".

Esta rotura, se produce "con una zona de hormigón comprimida en correspondencia con una de las caras largas", sobre la que girarán los dos pedazos en que la pieza queda dividida.

En cuanto al aspecto de ésta superficie de rotura, se puede decir que en tres de las caras la rotura es a  $45^\circ$ , formando una sola línea y en cuanto a la cuarta cara se une el principio y el fin, mediante una recta que ya no tendrá  $45^\circ$  como antes.

Si comparamos los resultados de un ensayo sobre una sección Cajón, notamos que el momento torsor último es el mismo que para la sección Llena, a pesar de tener distintos Momentos de Fisuración; esto se aprecia en el gráfico siguiente.

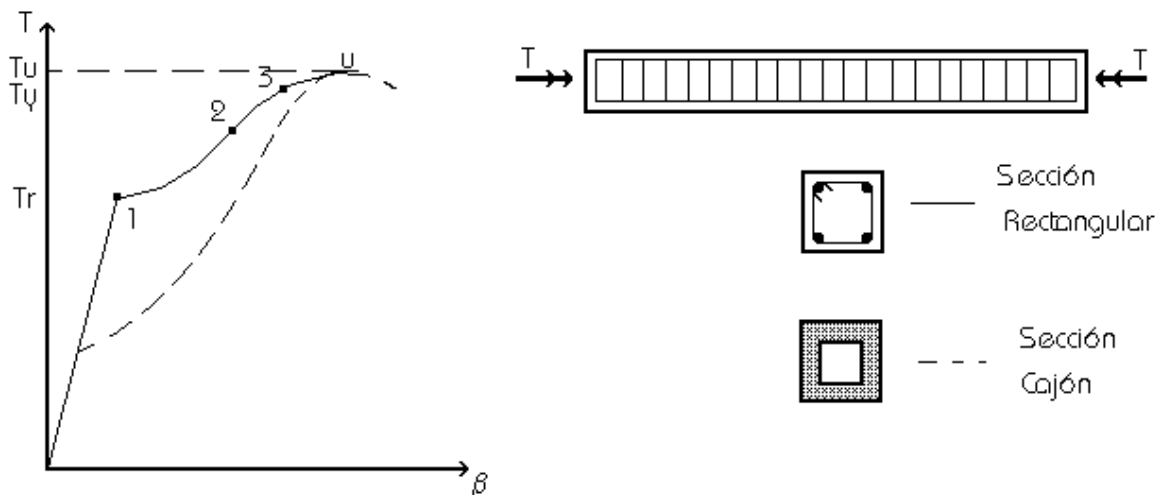


Fig. 12

Lo anterior, nos lleva a pensar que en el momento de la rotura el espesor comprimido es pequeño y solo hay una capa activa en la periferia.

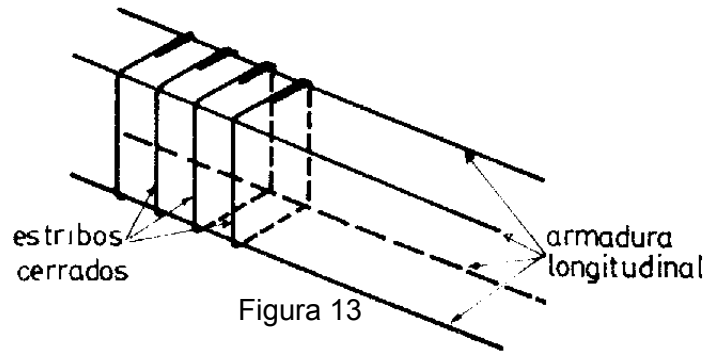
Como conclusión, podemos decir que en el diseño de piezas importantes donde la torsión es uno de los efectos predominantes, caso de viaductos de planta curva, etc., es

conveniente pensar en secciones huecas y cerradas, huecas para un mejor aprovechamiento de los materiales y cerradas por su mayor eficiencia frente a las abiertas, tanto desde un punto de vista resistente como de deformaciones.

## 6) DISPOSICION DE LAS ARMADURAS

En función de lo expresado en el punto anterior todo indicaría la necesidad de disponer armaduras cosiendo las fisuras según una dirección normal a las mismas, es decir, siguiendo una trayectoria helicoidal, con lo cual se obtendría la eficiencia óptima. Sin embargo esta disposición trae aparejado el riesgo de colocar la hélice invertida (según la dirección de las trayectorias de compresión) lo que estaría limitando el funcionamiento de la pieza a una de hormigón simple, además desde el punto de vista constructivo requerirá para su ejecución cuidados especiales.

En base a lo expuesto, por razones de seguridad y practicidad se disponen para absorber los esfuerzos de tracción generados por torsión, “**armaduras longitudinales**” y “**estribos cerrados**”, pues si bien este conjunto tiene una menor eficiencia que la hélice, entre ambas cumplen la misma función. En la figura 13 se puede observar una disposición de armaduras típica de una viga sometida a torsión.



## 7) DIMENSIONADO DE ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSION

(Según CIRSOC 201 1982)

### 7.1) Calcular la tensión de torsión $\tau_t$ .

En general, para cualquier tipo de sección, se tiene

$$\tau_t = Mt / W_t$$

Mt: momento torsor solicitante en kgcm

Wt: módulo resistente a la torsión. Ver tabla 1.

En particular, para sección rectangular de ancho  $b_o$  y altura total  $d$  (para calcular tensiones máximas de torsión siempre  $b_o$  es el lado menor) se tiene

$W_t = b_o^2 \times d / \beta$ , reemplazando, resulta

$$\tau_t = \beta \times Mt / (b_o^2 \times d)$$

Tabla 1

|           |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $b_o / d$ | 1.0   | 1.5   | 2.0   | 3.0   | 4.0   | 6.0   | 8.0   | 10.0  | 100.0 |
| $\alpha$  | 0.141 | 0.196 | 0.229 | 0.263 | 0.281 | 0.299 | 0.307 | 0.313 | 0.333 |
| $\beta$   | 4.81  | 4.33  | 4.07  | 3.74  | 3.55  | 3.35  | 3.26  | 3.20  | 3.00  |

## 7.2) Verificación a la torsión pura.

Habiendo calculado  $\tau_t$

- Si  $\tau_t \leq 0.25 \tau_{02}$  No es necesario calcular armadura. (colocar armadura mínima constructiva).
- Si  $0.25 \tau_{02} \leq \tau_t \leq \tau_{02}$  Calcular armadura según punto 7.4.
- Si  $\tau_t > \tau_{02}$  Redimensionar la sección.

## 7.3) Verificación a torsión y corte

$\tau_0$ : Tensión tangencial provocada por el esfuerzo de corte Q (en kg).

$$\tau_0 = Q / (0.9 \times b \times h)$$

b: ancho de la sección en cm.

h: altura útil de la sección en cm.

- Si  $\tau_0 + \tau_t \leq \tau_{012}$  Colocar armadura mínima
- Si  $\tau_0 + \tau_t > \tau_{012}$  y además  $\tau_0 + \tau_t \leq 1.3 \tau_{012}$   
 $\tau_0 \leq \tau_{03}$   
 $\tau_t \leq \tau_{02}$

Se deberá determinar por separado la armadura para absorber  $\tau_0$  y  $\tau_t$ . En caso de que alguna de las tres condiciones anteriores no se cumplan simultáneamente se deberá redimensionar la sección de hormigón.

## 7.4) Cálculo de las armaduras.

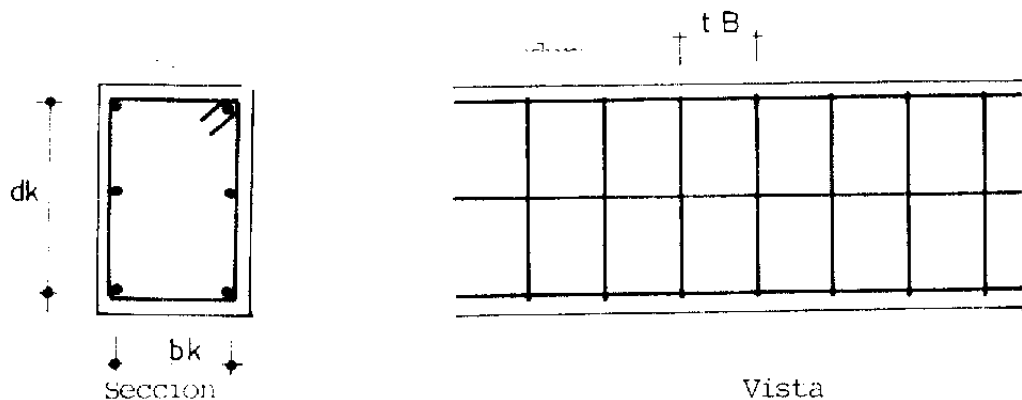


Figura 14

$$A_k = b_k \times d_k$$

Sección de estribos  $A_{sb}$  necesaria para absorber  $M_t$ .

$$A_{sb} = \frac{M_t \times t_b}{2 A_k \times \sigma_s}$$

$$2 A_k \times \sigma_s$$

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{ek}}{1.75} \leq 2400 \text{ kg/cm}^2$$

$\sigma_{ek}$ : tensión característica del acero.

Sección total de barras longitudinales necesarias para absorber torsión.

$$A_{sl} = \frac{M_t \times U_k}{2A_k \times \sigma_s}$$

$U_k$ : perímetro de la sección de dimensionamiento.

$$U_k = 2 \times (b_k + d_k)$$

## 8) EJEMPLO DE APLICACION

NOTA:

Este ejemplo, simplificado, ya que se toman valores máximos de solicitaciones sin hacer las reducciones correspondientes admitidas por el Reglamento, pretende introducir al alumno en el cálculo de elementos a torsión y fijar los conceptos fundamentales del tema.

No obstante lo expresado, si se realiza un cálculo como el indicado, en general estaremos del lado de la seguridad.

EJEMPLO:

Calcular las solicitaciones y dimensionar la armadura de torsión de la viga V1 (fig.15) para una carga repartida  $q = 800 \text{ kg/m}^2$ , que tiene en cuenta peso propio más sobrecarga.

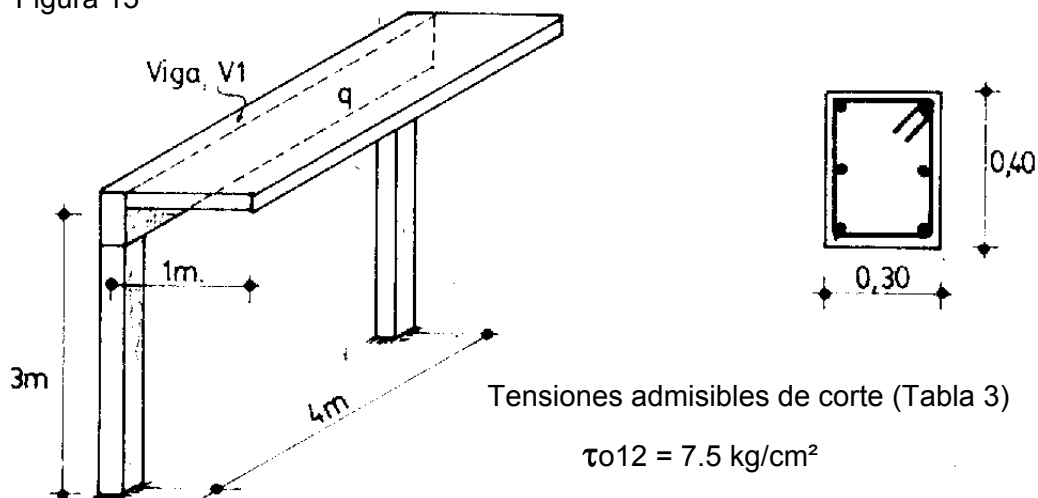
Materiales y Recubrimiento:

Hormigón H21, Acero ADN 420, Recubrimiento a ejes de barras 2.5 cm.

$$\text{Tensión del hormigón: } \sigma'_{bk} = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Tensión del acero: } \sigma_{ek} = 4200 \text{ kg/cm}^2; \sigma_s = 4200/1.75 = 2400 \text{ kg/cm}^2$$

Figura 15



Tensiones admisibles de corte (Tabla 3)

$$\tau_{012} = 7.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{02} = 18.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{03} = 30.0 \text{ kg/cm}^2$$

Cálculo de solicitaciones:

**a) Losa en voladizo**

**Momento flector de la losa** (a nivel de empotramiento con la viga V1)

$$M_{fl} = (q \times l^2)/2 = (800 \text{ kg/m}^2) \times (1 \text{ m})^2/2 = 400 \text{ kgm/m}$$

**Reacción de la losa**

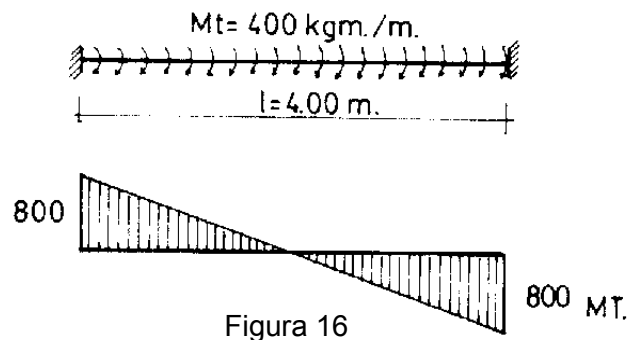
$$R = q \times l = (800 \text{ kg/m}^2) \times 1 \text{ m} = 800 \text{ kg/m}$$

**b) Viga**

**Momento torsor en viga.**

El momento flector de empotramiento de la losa se transmite como momento torsor a la viga V1 distribuido a lo largo de la misma.

$$M_t = M_{fl} = 400 \text{ kgm/m}$$

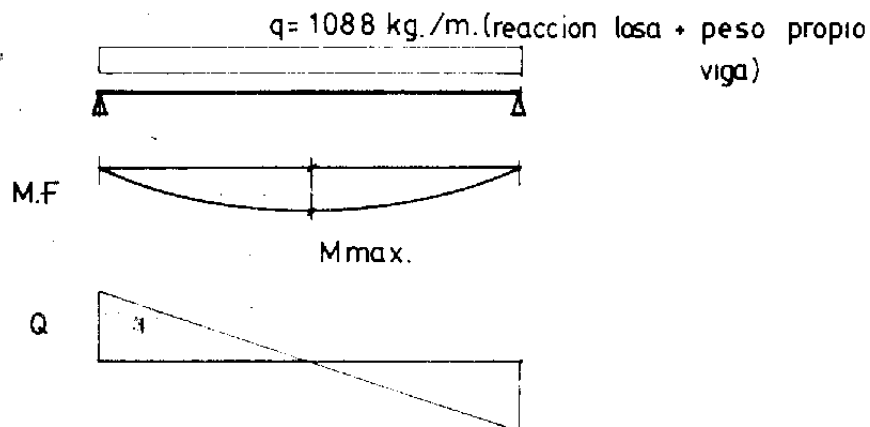


Momentos torsores de empotramiento

$$M_t^A = M_t^B = M_t \times l/2 = (400 \text{ kgm/m}) \times 4\text{m}/2 = 800 \text{ kgm}$$

Un método sencillo para calcular la distribución de momentos torsores a lo largo de la viga (diagrama) como así también los momentos de empotramiento es considerar el momento torsor como una carga ficticia.

Si se trata de momentos torsores repartidos se los reemplaza por una carga repartida, y los  $M_t$  concentrados se los reemplaza por una carga concentrada. En estas condiciones las reacciones representan los momentos de empotramiento y el diagrama de corte representa la distribución de momentos torsores como se puede ver en la figura 16.



---

Análisis de cargas:

Peso propio en viga:  $0.30 \times 0.40 \times 2400 = 288 \text{ kg/m}$

Reacción losa 800 kg/m  
1088 kg/m

***Solicitaciones de flexión y corte:***

$M_{\text{máx.}} = q \cdot l^2/8 = (1088 \times 4^2)/8 = 2176 \text{ kgm}$

$RA = RB = (q \times l)/2 = (1088 \times 4)/2 = 2176 \text{ kg}$

**c) Verificación de tensiones tangenciales  $\tau$**

1)  $\tau_0 \leq \tau_{03}$  (Tensiones debidas al corte)

$$\tau_0 = Qv/(b \times 0.9h) = 2176 \text{ kg}/(30 \text{ cm} \times 0.9 \times 37 \text{ cm}) = 2.12 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{03}$$

2)  $\tau_t \leq \tau_{02}$  (Tensiones debidas a torsión)

$$\tau_t = Mt/Wt$$

$$d/b = 40/30 = 1.33$$

$\beta = 4.52$  (valor que se obtiene de tabla 1 en función de la forma)

$$Wt = (b^2 \cdot d)/\beta = (30^2 \times 40)/4.52 = 7964.60 \text{ cm}^3$$

$$\tau_t = (800 \text{ kg} \times 100 \text{ cm})/7964.60 \text{ cm}^3 = 10.04 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{02} = 18 \text{ kg/cm}^2$$

3)  $\tau_0 + \tau_t \leq 1.30 \tau_{02}$

$$\tau_0 + \tau_t = 10.04 + 2.12 = 12.14 \text{ kg/cm}^2 > \tau_{012} = 5 \text{ kg/cm}^2 < 1.3 \times \tau_{02} = 23.4$$

Hay que dimensionar armadura de torsión, corte y flexión.

***e) Cálculo de armaduras:***

**1) Por Flexión:**

Armadura longitudinal:

Se realiza un cálculo en forma aproximada de la armadura principal de flexión.

$$A = 0.50 \times M \text{ (tm)} / h \text{ (m)} = 0.5 \times 2.176 \text{ tm} / 0.37 \text{ m} = \mathbf{2.94 \text{ cm}^2}$$

**2) Por torsión:**

***Armadura de estribos:***

$$A_k = b_k \times d_k = 25 \times 35 = 875 \text{ cm}^2$$

$$b_k = 25 \text{ cm}; \quad d_k = 35 \text{ cm}$$

$$A_{sb} = \frac{M_t \times t_B}{\sigma_s}$$

$$2A_k \times \sigma_s$$

---

$t_B = 20 \text{ cm}$  (separación de estribos adoptada)

$$A_{sb} = \frac{800 \text{ kgm} \times 20 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}}{2 \times 875 \text{ cm}^2 \times 2400 \text{ kg/cm}^2} = 0.38 \text{ cm}^2/\text{m}$$

La sección necesaria de un estribo será:

$$A_{s1} = A_{sb} \times s = 0.38 \text{ cm}^2/\text{m} \times 0.20 \text{ m} = 0.08 \text{ cm}^2$$

La armadura de estribos definitiva será adoptada luego de conocer la necesaria para absorber el corte.

**Armadura Longitudinal por torsión:**

$$A_{sl} = \frac{M_t \times U_k}{2 A_k \times \sigma_s}$$

$$2 A_k \times \sigma_s$$

$U_k$ : perímetro de la sección de dimensionamiento.

$$U_k = 2 \times (b_k + d_k) = 2 \times (25 + 35) = 120 \text{ cm}$$

$$A_k = b_k \times d_k = 25 \times 35 = 875 \text{ cm}^2$$

$$b_k = 25 \text{ cm}; \quad d_k = 35 \text{ cm}$$

$$A_{sl} = \frac{M_t \times U_k}{2 A_k \times \sigma_s} = \frac{800 \text{ kgm} \times 100 \text{ cm} \times 120 \text{ cm}}{2 \times 875 \text{ cm}^2 \times 2400 \text{ kg/cm}^2} = 2.28 \text{ cm}^2$$

Esta armadura se debe repartir en las cuatro caras, preferentemente disponer al menos 2 barras en correspondencia con las caras largas, zona de máximas tensiones tangenciales.

La sección necesaria en cada cara será:

$$A_{s1} = A_{sl}/4 = 2.28 \text{ cm}^2/4 = 0.57 \text{ cm}^2/\text{cara}$$

**3) Por Corte:**

Armadura transversal, estribos cerrados (Art. 17.5.4 del CIRSOC 201 – 1982)

Valor de cálculo de la tensión de corte:

$$\text{Zona de corte 1 } (\tau_0 \leq \tau_{012}) \dots\dots\dots \tau = 0.4 \tau_0$$

$$\text{Zona de corte 2 } (\tau_0 \leq \tau_{02}) \dots\dots\dots \tau = \tau_0^2/\tau_{02} \geq 0.4 \tau_0$$

$$\text{Zona de corte 3 } (\tau_{02} < \tau_0 \leq \tau_3) \dots\dots\dots \tau = \tau_0$$

En este caso

$$\tau_0 = Q_v/(b \times 0.9h) = 2176 \text{ kg}/(30 \text{ cm} \times 0.9 \times 37 \text{ cm}) = 2.12 \text{ kg/cm}^2 < \tau_{012}$$

$$\tau = 0.4 \tau_0 = 0.4 \times 2.12 = 0.85 \text{ kg/cm}^2$$

Armadura de estribos necesaria, total para todas las ramas dispuestas:

$$A_{s \text{ est}} = \frac{\tau \times b_0 \times s \times 100}{\sigma_s}$$

$$\sigma_s$$

Conviene calcular directamente la armadura por metro, haciendo

$$A_{st}/s = \tau \times b_o \times 100 / \sigma_s$$

$A_{st} / s$ : Armadura de estribos necesaria en  $\text{cm}^2/\text{m}$

$\tau$ : Tensión de corte en  $\text{kg}/\text{cm}^2$

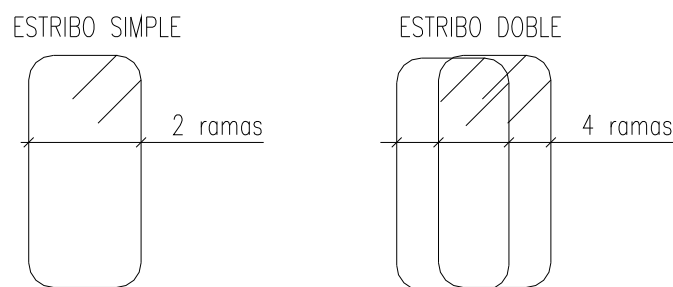
$b_o$ : Ancho de la viga en  $\text{cm}$ , en nuestro caso 30  $\text{cm}$

$\sigma_s$ : Tensión admisible del acero en  $\text{kg}/\text{cm}^2$

100: Valor numérico para 1 m de longitud, para pasar de  $\text{cm}$  a metro, son 100  $\text{cm}/\text{m}$

$$A_{st}/s = [0.85 \text{ kg} / \text{cm}^2 \times 30\text{cm} \times 100 \text{ cm}/\text{m}] / 2400 \text{ kg}/\text{cm}^2 = 1.06 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Se adoptan estribos simples de dos ramas con separación de 20  $\text{cm}$  ó 0.20m



$n$ : número de ramas

La sección necesaria de cada rama surge de hacer

$$A_{s1} = A_{st}/s \times s / n = 1.06 \text{ cm}^2/\text{m} \times 0.20\text{m} / 2 = 0.11 \text{ cm}^2$$

#### 4) Armaduras totales:

##### Armadura de estribos:

Se suma la armadura necesaria por torsión con la de corte:

|                                   |                                      |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| Por torsión .....                 | 0.08 $\text{cm}^2$                   |
| Por corte .....                   | <u>0.11 <math>\text{cm}^2</math></u> |
| Sección total de un estribo ..... | <b>0.19 <math>\text{cm}^2</math></b> |

Se adoptan hierros de 6  $\text{mm}$ , cuya sección es:

$$S = 0.785 \times (0.6)^2 \text{ cm}^2 = 0.28 \text{ cm}^2 > 0.19 \text{ cm}^2$$

Conclusión: Estribos  $\phi$  6 c/20

##### Armadura longitudinal:

Se suma la armadura necesaria por torsión con la de flexión:

Cara inferior:

|                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| Por torsión .....                   | 0.57 $\text{cm}^2$                   |
| Por flexión .....                   | <u>2.94 <math>\text{cm}^2</math></u> |
| Sección total en cara inferior..... | <b>3.51 <math>\text{cm}^2</math></b> |

Se adoptan 2  $\phi$  10 + 2  $\phi$  12 ( 3.83  $\text{cm}^2$ )



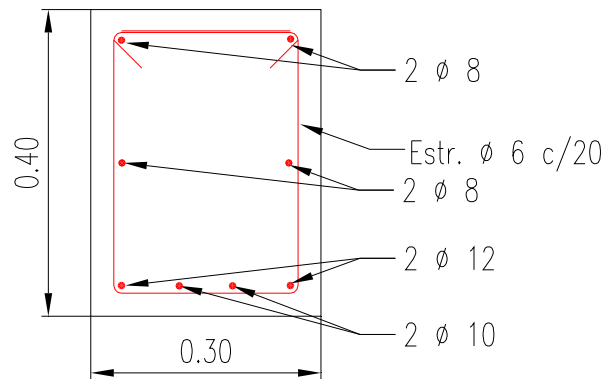
---

Caras restantes:

Por torsión ..... 0.57 cm<sup>2</sup>




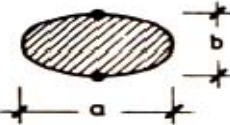

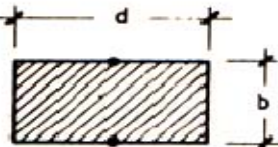
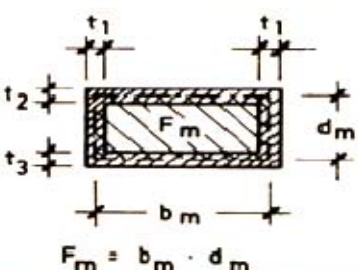


Se adoptan 2  $\phi$  8 en cada cara (1.00 cm<sup>2</sup>)

Armaduras resultantes:



Las 2 barras de  $\phi$  10 podrán levantarse al llegar al apoyo.

**Tabla 2** Módulo resistente y Momento de inercia polar para secciones típicas

| Sección   | $\tau_{T \text{ máx}} = \frac{M_T}{W_T}$   | $J_T$   |  |       |       |       |       |       |          |
|---|--|---|--|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
|    | $\frac{16}{\pi} \frac{M_T}{d^3}$           | $\frac{\pi d^4}{32}$  |  |       |       |       |       |       |          |
|    | $\frac{16}{\pi} \frac{d}{d^4 - d_i^4} M_T$ | $\frac{\pi}{32} (d^4 - d_i^4)$  |  |       |       |       |       |       |          |
|    | $\sim \frac{2}{\pi} \frac{M_T}{t d_m^2}$   | $\sim \frac{\pi t d_m^3}{4}$  |  |       |       |       |       |       |          |
|    | $\frac{16}{\pi} \frac{M_T}{a \cdot b^2}$   | $\frac{\pi}{16} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$  |  |       |       |       |       |       |          |
|   | $4,81 \frac{M_T}{a^3}$                     | $0,141 a^4$   |  |       |       |       |       |       |          |
|  | $\beta \frac{M_T}{b^2 d}$                  |   | $\alpha b^3 d$                                 |       |       |       |       |       |          |
|   | d/b  | 1,5   | 2,0  | 3,0   | 4,0   | 6,0   | 8,0   | 10,0  | $\infty$ |
|   | $\alpha$                                   | 0,196   | 0,229  | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta$   | 4,33                                       | 4,07  | 3,74   | 3,55  | 3,35  | 3,26  | 3,20  | 3,00  |          |
|  | <i>Fórmula de Bredt</i>                    |   |  |       |       |       |       |       |          |
|   | Sección hueca cualquiera                   |   | $\frac{4 \cdot F_m^2}{\sum_i \frac{s_i}{t_i}}$ |       |       |       |       |       |          |
| Sección hueca rectangular   |  | $\frac{4 \cdot b_m \cdot d_m}{\frac{2}{b_m \cdot t_1} + \frac{1}{d_m \cdot t_2} + \frac{1}{d_m \cdot t_3}}$ |  |       |       |       |       |       |          |
|  | $\sim 5,32 \frac{M_T}{d^3}$                | $0,133 d^4$   |  |       |       |       |       |       |          |
|  | $\sim 5,41 \frac{M_T}{d^3}$                | $0,130 d^4$   |  |       |       |       |       |       |          |

**Tabla 3** (Tabla 18 del Reglamento CIRSOC 201 – 1982)

Los valores indicados están en Mpa, para pasar a kg/cm<sup>2</sup> multiplicar por 10.

Tabla 18. Límites de los valores básicos de la tensión de corte  $\tau_0$  en MN/m<sup>2</sup>\* bajo la carga de servicio.

| 1        | 2    | 3                              | 4   | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10  | 11   |
|----------|------|--------------------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|---|--|
| Elemento | Zona | Tensión de corte máx. $\tau_0$ | Valores límites de la tensión de corte $\tau_0$ para los tipos de hormigón: |        |        |        |        |        | Verificación de la armadura de corte                  | Armadura de corte  |
|          |      |                                | H - 13  | H - 17 | H - 21 | H - 30 | H - 38 | H - 47 |   |  |
| 1a       | 1)   |                                | 0,25  | 0,30   | 0,35   | 0,40   | 0,50   | 0,55   | No es necesaria (No obstante ver el artículo 17.5.5.) | Ninguna  |
| 1b       | 1    | $\tau_{011}$                   | 0,35  | 0,45   | 0,50   | 0,60   | 0,70   | 0,80   |   |  |
| 2        | 2    | $\tau_{02}$                    | 1,20  | 1,50   | 1,80   | 2,40   | 2,70   | 3,00   | Necesaria   | Se permite una armadura de corte reducida de acuerdo con la ecuación (25). |
| 3        | 1    | $\tau_{012}$                   | 0,50  | 0,65   | 0,75   | 1,00   | 1,10   | 1,25   | No es necesaria                                       | (ver el artículo 17.5.5.)  |
| 4        | 2    | $\tau_{02}$                    | 1,20  | 1,50   | 1,80   | 2,40   | 2,70   | 3,00   | Necesaria   | Se permite una armadura de corte reducida de acuerdo con la ecuación (25)  |
| 5        | 3    | $\tau_{03}$                    | 2,00  | 2,50   | 3,00   | 4,00   | 4,50   | 5,00   | Necesaria   | Armadura de corte total  |

sólo para  $d \text{ ó } d_0 \geq 45 \text{ cm}$  y si se utiliza a cero nervurado.

1) Los valores del renglón 1-a valen para armadura escalonada, es decir, parcialmente anclada en la zona traccionada.

\* 1MN/m<sup>2</sup>  $\approx$  1 kgf/cm<sup>2</sup>